Probabilidad 2020 **Centro de Matemática** **Primer Parcial**

- El primer parcial del curso de probabilidad será no presencial, el día martes 2 de junio, a las 10:30 horas.
- Cada estudiante tendrá que resolver un ejercicio compuesto por partes similares o idénticas a las que componen la lista de ejercicios seleccionados (puede ser una unión de 2 ejercicios cortos, un recorte de un ejercicio largo, etc).
- El martes 2 a las 10:30 publicamos la lista de alumnos con el ejercicio indicado para cada uno. Contará con 30 minutos, y deberá entregarlos a los mails mencionados sacando una o varias fotos de su resolución escrita a mano, hasta las 11:05.
- Vistas las condiciones de no presencialidad, los puntajes de cada una de las cuatro pruebas (dos informes y dos parciales) serán de 25 puntos cada una.
- Vistas las condiciones de no presencialidad, el requisito para aprobar el curso sigue siendo de 40 puntos, pero no habrá exoneración del práctico.

Inscriptos

1. Andrés Camargo
2. Damián Castro
3. Luciana Sastre
4. Juan Agustín Píriz Lorenzo,
5. Efraín Pérez
6. Lucas de León
7. Carolina Chiesa
8. Noelia Olivera
9. Micaela Berezan
10. Ezequiel García
11. Julián Tricánico
12. María Ugalde
13. Manu Bervejillo
14. Marcos Martínez
15. Gonzalo Soto
16. Federico Correa
17. Clara Herrera
18. Santiago Contte

Ejercicios seleccionados

1. Demostrar que para cualquier sucesión de sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ vale la igualdad

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_1 \cup (\overline{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2) \cup (\overline{\mathbf{A}}_1 \overline{\mathbf{A}}_2 \mathbf{A}_3) \cup \ldots.$$

2. Demostrar que si $\mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_3 \subset \cdots$, entonces existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A}),$$

donde $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n$.

3. Demostrar que se verifica $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\big) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_k)$ para sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ arbitrarios.

4. Demostrar que $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k\big) = 1 - \mathbf{P}\big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathbf{A}}_k\big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)$, para sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ arbitrarios.

5. Demostrar la igualdad

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n\Big) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2) + \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1 \overline{\mathbf{A}}_2 \mathbf{A}_3) + \cdots$$
$$+ \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1 \ldots \overline{\mathbf{A}}_{n-1} \mathbf{A}_n) + \cdots$$

donde $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \ldots$ es una sucesión de sucesos arbitrarios.

6. Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se eligen tres bolas al azar. Calcular las probabilidades de que: (a) todas las bolas extraídas sean blancas; (b) todas las bolas extraídas sean negras; (c) se extraiga una bola blanca y dos negras.

7. De un mazo de 52 cartas se eligen 4 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que se extraigan: (a) por lo menos un as; (b) no menos de dos ases.

8. Se considera un experimento consistente en arrojar un dado dos veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados sea: (a) igual a 5; (b) no mayor de 5.

9. Hallar la probabilidad de que al tirar un dado tres veces consecutivas, la suma de los resultados sea no menor que 16.

10. Calcular la probabilidad de que se acepte una partida de 100 unidades, 5 de las cuales están falladas, si se toman de muestra la mitad, y las condiciones para aceptarla son contener a lo sumo un 2% de unidades falladas.

11. Se tienen K urnas con n bolas cada una, numeradas de 1 a n. De cada urna se elige al azar una bola. Hallar la probabilidad de que el número mayor resultante sea m ($m = 1, \dots, n$).

12. De una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras se extrae al azar una bola, que luego se pone en una segunda urna, que tiene 3 bolas blancas y 4 negras. Calcular la probabilidad de que una bola extraída de la segunda urna sea blanca.

13. Un estudiante asiste a un examen sabiendo solo 15 de las 20 preguntas del programa. En el billete del examen hay 3 preguntas. Calcular la probabilidad de que el estudiante sepa las 3 preguntas, de las dos formas siguientes: (a) aplicando las reglas clásicas del cálculo de probabilidades; (b) utilizando la noción de probabilidad condicional.

14. En una mesa hay tres armas de tipo A y una de tipo B. La probabilidad de acertar en el blanco con un arma de tipo A es de 0,7, y la de acertar con un arma de tipo B es 0,4. Se elige al azar un arma y se dispara un tiro al blanco. Calcular: (a) la probabilidad de fallar el tiro; (b) la probabilidad de haber elegido un arma de tipo B, sabiendo que el tiro falló.

15. En un partido de las eliminatorias, Uruguay debe tirar un penal. Se elige, con equi-probabilidad, quien ejecuta el tiro penal, entre tres jugadores: Suárez, Cavani, y un suplente. La estadística de Suarez cuenta con 97 aciertos de cada 100, la de Cavani con 95 cada 100, y la del suplente con 60 de cada 100. (a) Calcular la probabilidad de que el tiro se erre. (b) Si el tiro penal se erra: ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya pateado el suplente?

16. En una caja hay 4 pelotas de tenis nuevas y 2 usadas. Para un primer partido, se eligen 2 pelotas al azar, y luego se retornan a la caja. Se eligen otras dos pelotas de la misma caja para un segundo partido. Calcular la probabilidad de que ambas sean nuevas.

17. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos arbitrarios, con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Demostrar la desigualdad

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) \geq 1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}.$$

18. Los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son tales que: $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes; $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son incompatibles; $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes; $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0{,}4$ y $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = 0{,}1$. Calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ y $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}$.

19. La probabilidad de detectar un avión que vuela en una determinada región, por medio de un radar, es 0,9. En esta región operan en forma independiente tres radares. Calcular la probabilidad de que se detecte un avión en esa zona: (a) mediante los tres radares; (b) mediante por lo menos un radar.

20. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sucesos independientes dos a dos y equiprobables, cada uno de los cuales tiene probabilidad p. Supongamos que $\mathbf{P}(\mathbf{ABC}) = 0$. Hallar el valor de p que hace que la probabilidad de el suceso $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ sea máxima.

21. Calcular la probabilidad de obtener tres veces 6 puntos, al tirar un dado 5 veces.

22. En un proceso industrial, la probabilidad de que un cierto artículo resulte defectuoso es 0,01. Calcular la probabilidad de que, en 10 artículos elegidos al azar, resulten:

(a) por lo menos un defectuoso;

(b) no menos de dos defectuosos.

23. Calcular la probabilidad de que, en $2n$ experimentos en un esquema de Bernoulli, se obtengan éxitos únicamente en los n experimentos con número par, si la probabilidad de éxito en un experimento es p.

24. Un trabajador controla 5 máquinas de un mismo tipo. La probabilidad de que una máquina requiera la atención del trabajador en el lapso de una hora es 1/3. Calcular la probabilidad de que, en el curso de una hora, el trabajador sea requerido por:

(a) 2 máquinas;

(b) no menos de 2 máquinas.

25. En una habitación hay tres lámparas. La probabilidad de que cada una de estas lámparas no se queme, en el lapso de un año, es 0,8. Calcular la probabilidad de que, en el curso de un año, estén funcionando:

(a) 2 lámparas;

(b) por lo menos una lámpara.

26. La probabilidad de éxito en un esquema de Bernoulli es p. Calcular la probabilidad de que, en el experimento que ocupa el k-ésimo lugar, ocurra éxito por ℓ-ésima vez $(0 < \ell \leq k \leq n)$.

27. Una partícula que fluctúa por los puntos enteros de la recta real, en un cierto momento (momento de salto) se traslada una unidad a la izquierda con probabilidad $1/2$, o una unidad a la derecha con probabilidad $1/2$ (independientemente de la dirección de los movimientos anteriores). Este esquema se denomina *paseo al azar simple*. Calcular la probabilidad de que, luego de $2n$ saltos, la partícula se encuentre en el punto desde el cual comenzó a trasladarse.

28. Se tira una moneda 1600 veces. Calcular aproximadamente, la probabilidad de que se obtenga cara:

(a) exactamente 780 veces;

(b) de 780 a 820 veces.

29. En determinadas condiciones de producción de un cierto artículo, la probabilidad de que resulte defectuoso es 0,01. Calcular la probabilidad de que, entre 10000 artículos examinados de esta producción, resulten:

(a) de 80 a 110 defectuosos;

(b) no menos de 9950 artículos sin defectos.

30. En una compañía de seguros hay asegurados 50.000 personas, de una cierta edad y grupo social. La probabilidad de defunción en el curso de un año, para cada individuo, es 0,006. Cada persona asegurada paga, al inicio del año, 40 dólares, y en caso de fallecer, sus parientes reciben de la compañía 5000 dólares. Calcular la probabilidad de que, en el lapso de un año, dicha compañía:

(a) sufra pérdidas;

(b) obtenga ganancias de por lo menos 300.000 dólares;

(c) obtenga ganancias de por lo menos 800.000 dólares.

31. Demostrar que para $n = 10.000$ nacimientos, la probabilidad de que el desvío del valor esperado de varones (que es 5000) sea a lo sumo un 10% (es decir, a lo sumo 500) es mayor que $0,99$.

32. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 1000 tiradas de una moneda, la frecuencia de aparición de cara se diferencie de la probabilidad de aparición de cara, en no más de 0,03.

33. La probabilidad de éxito en un esquema de Bernoulli es 0,005. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 800 experimentos, ocurra por lo menos un éxito. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial.)

34. La probabilidad de acertar en un blanco es de 0,001. Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o mas veces, en una serie de 5000 disparos. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial.)

35. *La mala suerte no es verdad: el modelo geométrico.* Dada una serie de experimentos de Bernoulli, con probabilidad de éxito p, contamos el número de experimentos necesarios hasta obtener un primer éxito. Tenemos entonces un experimento aleatorio con $\Omega = \{1, 2, \dots\}$. Llamemos T al momento en el cual se obtiene el primer éxito.

(a) Calcular $\mathbf{P}(T = k)$ para $k = 1, 2, \dots$.

(b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = k) = 1$. Esto demuestra que la probabilidad está bien definida[1]

(c) *Pérdida de memoria* Sea el suceso $\mathbf{A}$ consistente en que no tuvimos ningún éxito en los primeros N experimentos. Es decir

$$\mathbf{A} = \{T \geq n\}.$$

[1] Y demuestra también que la mala suerte no es verdad, porque en algún momento, si persistimos experimentando, vamos a tener éxito.

Demostrar que la probabilidad condicional a **A** coincide con la probabilidad inicial. Es decir, si en el paso n no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

36. En un supermercado rifan 10 autos, uno cada día. Un cliente asiduo tiene 10 boletos para participar en los sorteos. Que es más conveniente, para ganar por lo menos un auto:

(a) Jugar un ticket cada día

(b) Jugar los 10 tickets el mismo día.

(Asumimos que cada día la cantidad de tickets del sorteo es la misma). Fundamentar.

37. (a) Usando la fórmula de Stirling, probar:

$$C_n^{2n} \sim \frac{2^{2n}}{(\pi n)^{1/2}}.$$

(b) Un grupo de $2N$ niñas y $2N$ varones se divide en dos subgrupos del mismo tamaño. Hallar la probabilidad de que cada subgrupo contenga N niñas y N varones. Hallar una aproximación a esta probabilidad.

38. Supongamos que entre 400 niños que nacen, 210 son varones. Suponer $\alpha = 0.05$.

(a) Realizar un test de hipótesis bilateral para investigar si la proporción al nacimiento de niñas y varones es igual.

(b) Bajo la información de que la proporción de varones al nacimiento es mayor que la de niñas, realizar un test de hipótesis unilateral.

(c) Calcular la potencia del test anterior, en el supuesto de testear $p = 0.5$ contra $p > 0.52$.