Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Anillos y módulos
Primer semestre de 2025

Repartidos 1: Generalidades de grupos y anillos

Grupos

1. Probar lo que quedó como ejercicio en las Proposiciones 1.1.4 y 1.1.8 de las notas del curso.
2. Probar las Proposiciones 1.3.2, 1.3.3, 1.3.5 y 1.3.7 de las notas del curso.
3. Probar lo que quedó como ejercicio en la Proposición 1.4.2 y en el Corolario 1.4.5 de las notas del curso.

Anillos

4. Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia. Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se define
$$A + B := A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \qquad AB := A \cap B.$$
Probar que con estas operaciones $\mathcal{P}(X)$ es un anillo conmutativo. Determinar los elementos invertibles de $\mathcal{P}(X)$.
5. Probar la Proposición 2.1.4 de las notas del curso.
6. Un *anillo de Boole* es un anillo A tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Probar:
   a) $\mathcal{P}(X)$ con la estructura definida en el ejercicio es un anillo de Boole.
   b) Si A es un anillo de Boole, entonces se verifica $x + x = 0$ para todo $x \in A$.
   c) Todo anillo de Boole es conmutativo.
7. Sea z un elemento de un anillo con inverso a la derecha, *i.e.* existe x tal que $zx = 1$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   a) z tiene más de un inverso a la derecha.
   b) z no es invertible.
   c) z es divisor de cero a la izquierda *i.e.* existe $0 \neq t$ tal que $zt = 0$.
8. Probar que todo dominio finito es un cuerpo.
9. Sea A un anillo. Un elemento $z \in A$ es *nilpotente* si existe un entero positivo n tal que $z^n = 0$.
   a) Probar que si A es un dominio, entonces el único elemento nilpotente es 0.
   b) Probar que $\mathbb{Z}_n$ contiene elementos nilpotentes no nulos si y solo si n es divisible por el cuadrado de un número primo.
   c) Sean x e y elementos nilpotentes de A. Probar que si A es conmutativo, entonces $x+y$ es nilpotente. Probar con un contraejemplo que este resultado no vale en general si A no es conmutativo.
   d) Sea $z \in A$ tal que $z^n = 0$. Probar que $1 - z$ es invertible, siendo $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.
10. Sea A un anillo. Dado un subconjunto no vacío S de A, se define el *centralizador* de S por
$$C(S) = \{x \in A : xs = sx, \ \forall s \in S\}.$$
El *centro* de A es el centralizador de A; en este caso se escribe $Z(A)$ en vez de $C(A)$.

a) Probar que $C(S)$ es un subanillo de A y que $S \subset C(C(S))$, para todo $\emptyset \neq S \subset A$.

b) Sea $A = M_2(\mathbb{R})$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Hallar $C(B)$ y $C(C(B))$.

c) Sea A un anillo, probar que $Z\left(M_n(A)\right) = \{aI_n : \ a \in Z(A)\}$.

d) Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Probar que si $A \in M_n(\Bbbk)$ verifica $AB = BA$ para todo $B \in M_n(\Bbbk)$, entonces existe $a \in \Bbbk$ tal que $A = aI_n$.

11. Se consideran las matrices $\mathbf{1}, \ \mathbf{i}, \ \mathbf{j}, \ \mathbf{k} \in M_2(\mathbb{C})$, definidas por:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{C})$.

a) Probar que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$ y que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$.

b) Deducir: $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$ y $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$.

c) Probar que $\mathcal{H}$ es un subanillo $M_2(\mathbb{C})$.

d) Hallar el centro de $\mathcal{H}$.

El conjunto $\mathcal{H}$ con esta estructura se llama el *anillo de los cuaterniones*. Observar que existen isomorfismos $\{a\mathbf{1} : \ a \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$ y $\{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} : \ a, b \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{C}$, definidos por $a\mathbf{1} \leftrightarrow a$ y $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} \leftrightarrow a + bi$, respectivamente. En base al primer isomorfismo, escribiremos a en vez de $a\mathbf{1}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

12. Sea $\mathcal{H}$ el anillo de los cuaterniones. Dado $x = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathcal{H}$, se definen

$$\overline{x} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}, \quad N(x) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{y} \quad T(x) = 2a.$$

Probar:

a) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ y $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

b) $N(x) = x\overline{x}$ y $x^2 - T(x)\,x + N(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

c) $N(xy) = N(x)N(y)$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

d) $\mathcal{H}$ es un anillo con división.