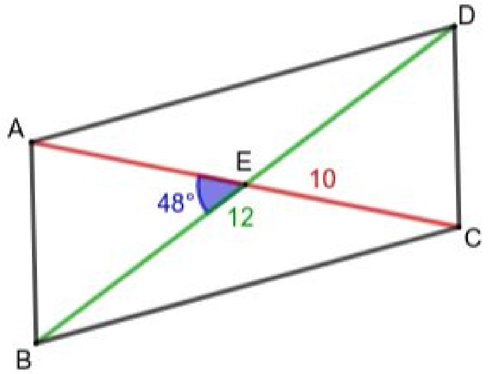
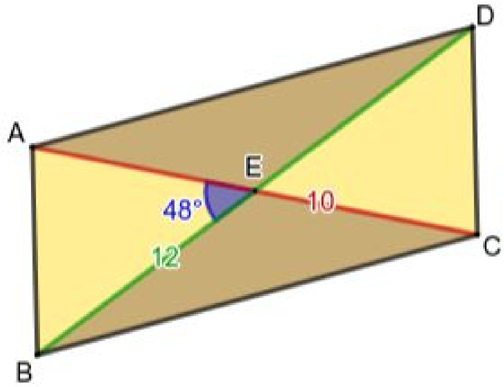
Matemática 0 (2020)

Soluciones del repartido 1 (tema 2)

1. Comencemos con un dibujo que indique los datos que tenemos.

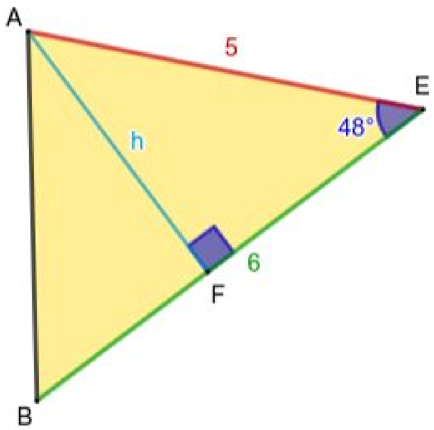


El paralelogramo ABCD se puede subdividir en cuatro triángulos.



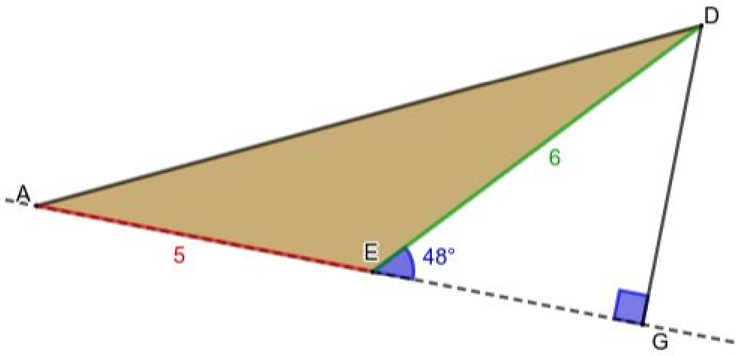
Los triángulos del mismo color son semejantes; de hecho, son congruentes (¿por qué?). Para atacar el problema, calcularemos las longitudes de los lados de cada uno de estos triángulos.

Empecemos por alguno de los amarillos (por ejemplo el triángulo ABE). Como -recordemos- las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, ya conocemos la longitud de dos de sus lados: AE (que mide 5) y BE (que mide 6). Hasta ahora, sólo hemos trabajado con triángulos rectángulos, así que dividiremos a ABE en dos, trazando una de sus alturas.



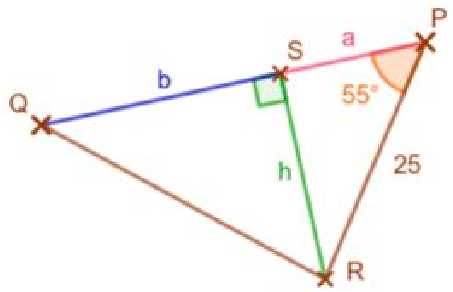
Recordando la definición de coseno y seno, tenemos que $FE = 5\ cos\ 48° \approx 3.35$, y que $FA = 5\ sen\ 48° \approx 3.72$. Como $BE = 6$, deducimos que $BF = 6 - FE \approx 2.65$. Entonces, como ABF es un triángulo rectángulo, podemos aplicar el teorema de pitágoras para obtener $AB = \sqrt{FA^2 + BF^2} \approx 4.57$.

Podemos proceder de igual forma con uno de los triángulos marrones. Tomemos por ejemplo el triángulo AED y tracemos la altura desde D.



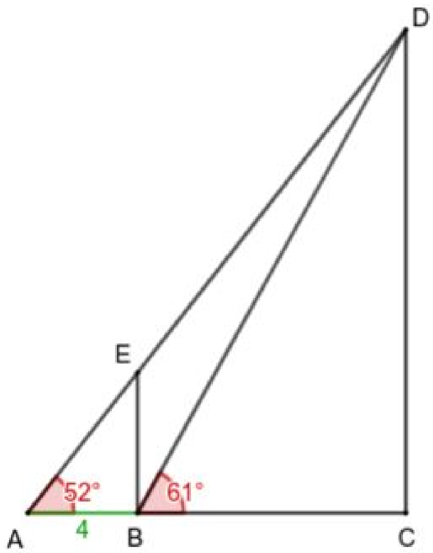
Por la definición de seno, $EG = 6\ cos\ 48° \approx 4.01$ y $DG = 6\ sen\ 48° \approx 4.46$. Por el teorema de Pitágoras,
$AD = \sqrt{AG^2 + DG^2} = \sqrt{(AE + EG)^2 + DG^2} \approx 10.05$.

2. La idea es construir un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos sea α , y otro tal que uno de sus ángulos sea β .
   Comencemos por α . Queremos que $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$; por otro lado, la definición de seno nos dice que $sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$. Entonces tiene sentido imponer que el triángulo construido tenga un cateto de longitud $a = 5$ e hipotenusa $c = 6$. Por el teorema de Pitágoras, el otro cateto debe medir $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{11}$. Con estos datos es fácil construir el triángulo.
   Con β se puede proceder igual. Tenemos que $\frac{3}{4} = cos\ \beta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$, así que un cateto puede medir $x = 3$ y la hipotenusa $z = 4$. Luego el otro cateto deberá medir $y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{7}$.
3. Los triángulos AGH y ABE son semejantes. Entonces $\frac{BE}{GH} = \frac{AB}{AG}$, es decir, $\frac{BE}{2} = \frac{13}{8}$. Luego $BE = \frac{13}{4}$. Como ABCD es un cuadrado, tenemos que $BC = AB$. Entonces $EC = BC - BE = AB - BE = 13 - \frac{13}{4} = \frac{3}{4}13$.
   Por otro lado, los triángulos CED y BFE son semejantes (tienen dos ángulos congruentes entre sí). Por el teorema de Thales, $\frac{BF}{CD} = \frac{BE}{EC}$. Luego $\frac{BF}{13} = \frac{13/4}{3 \cdot 13/4} = \frac{1}{3}$ y $BF = \frac{13}{3}$.
4. En el triángulo PQR trazamos la altura h desde R. Dividimos a PQ en dos partes de longitudes a y b.



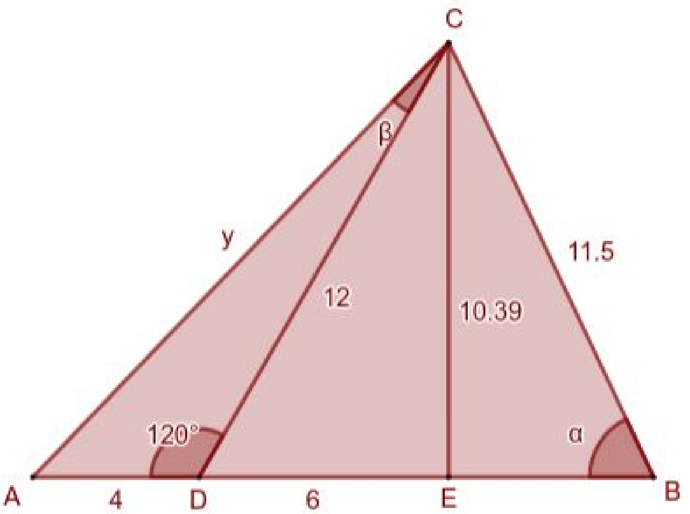
Tenemos que $a = 25\ cos\ 55° \approx 14.34$ y $h = 25\ sen\ 55° \approx 20.48$. Como PQ = 38, se sigue que $b = 38 - a \approx 23.66$. Luego $QR = \sqrt{b^2 + h^2} \approx 31.29$.

5. Trazamos una vertical por B, como en la figura.



Observando el triángulo ABE deducimos que $\frac{CD}{AC} = tan(52°)$, es decir, $\frac{CD}{4+BC} = tan(52°)$.
Como los triángulos ABE y ACD son semejantes, tenemos que $\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{4}$.
Observando el triángulo BCD deducimos que $\frac{CD}{BC} = tan(61°)$. Entonces $\frac{1}{tan(52°)} = \frac{4+BC}{CD} = \frac{4}{CD} + \frac{1}{tan(61°)}$, y $CD = \frac{4}{1/tan(52°) - 1/tan(61'')}$. Teniendo CD, podemos calcular BC: $BC = \frac{CD}{tan(61°)} \approx 9.77$.

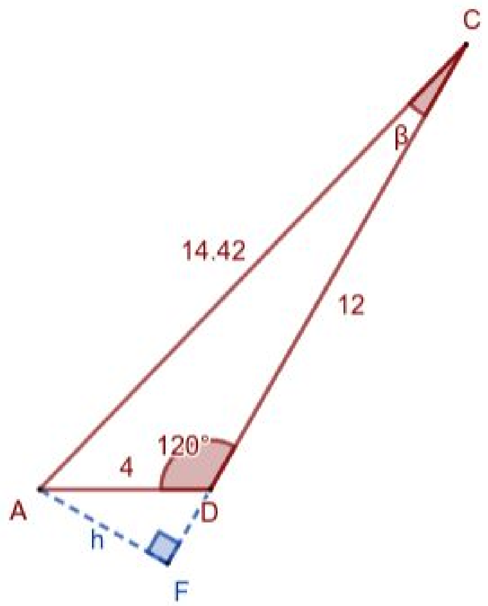
6. Sea D el extremo no marcado del segmento de longitud 4. Observar que el ángulo BDC es de 60°.
Tracemos la altura del triángulo ABC desde C, y llamemos E al pie de altura. Esta altura tiene longitud $h = 12\ sen\ 60° \approx 10.39$. También tenemos que $DE = 12\ cos\ 60° = 6$.



Luego $\frac{10.39}{11.5} \approx \frac{EC}{BC} = sen\,\alpha$, y $\alpha \approx 64°$. Además $BE \approx \sqrt{11.5^2 - 10.39^2} \approx 4.93$. Entonces $x = DE + EB \approx 6 + 4.93 \approx 10.93$.

Por otro lado, observando el triángulo AEC obtenemos que $y \approx \sqrt{10^2 + 10.39^2} \approx 14.42$.

Falta hallar β. Tomamos el triángulo ADC y trazamos la altura desde A.



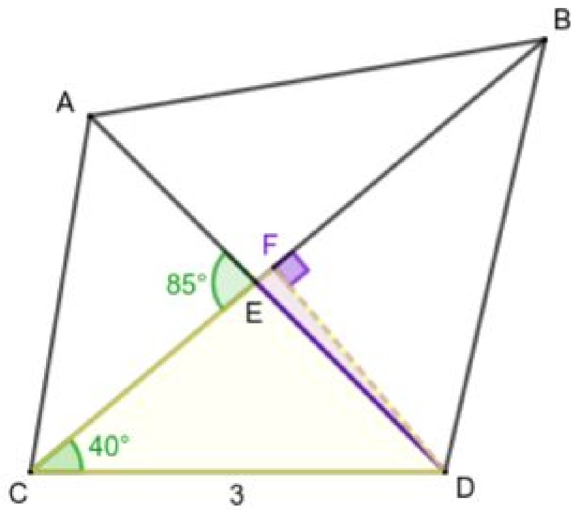
Tenemos que $h \approx 14.42\; sen\,\beta = 4\; sen(60°)$. Entonces $sen\,\beta \approx 0.24$, y $\beta \approx 14°$.

7. Supongamos primero que el triángulo considerado es acutángulo. Comenzaremos viendo que $\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b}$. Tracemos la altura h desde el vértice con ángulo γ. Observando los dos triángulos que se forman, tenemos que $h = a\; sen\,\beta = b\; sen\,\alpha$. Entonces $\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b}$. Las otras igualdades se demuestran por analogía (es decir, aplicando el razonamiento a los demás pares de ángulos y lados, como lo hicimos con α, β, a y b).
   Es importante notar que este argumento funciona bien para el caso en que el triángulo es acutángulo. Si el triángulo es rectángulo, el argumento se simplifica, ya que podemos usar la definición de las razones trigonométricas directamente (sin trazar ninguna altura). Si el triángulo es obtusángulo, hay un problema con el enunciado, ya que en el curso aún no hemos definido el seno para un ángulo obtuso

(¿por qué?). La solución es avanzar un poco y mirar la lección 2, donde vemos esta definición y algunas propiedades.
Habiendo visto la lección 2, supongamos ahora que el triángulo tiene, en cambio, un ángulo obtuso, por ejemplo α. En este caso, la altura trazada desde γ queda “por fuera” del triángulo. Repitiendo el razonamiento de antes, se obtiene la igualdad $\frac{sen(180°-\alpha)}{a} = \frac{sen\,\beta}{b}$. Como $sen(180° - \alpha) = sen\,\alpha$, obtenemos $\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\beta}{b}$, como queríamos.

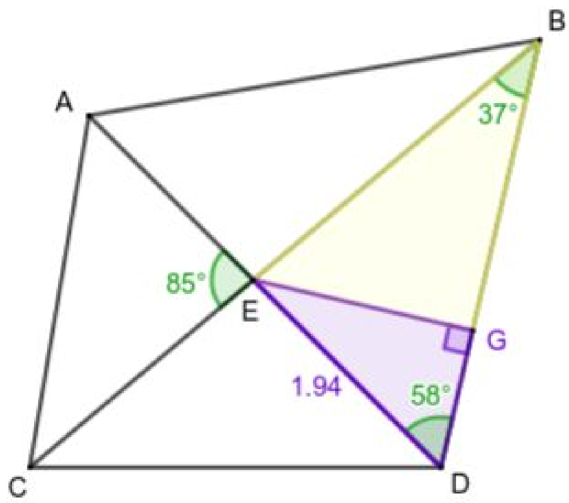
8. La idea es ir obteniendo la longitud de cada uno de los segmentos de la figura, aplicando un razonamiento similar de cada uno de los cuatro triángulos pequeños de la figura (básicamente aplicar la definición de seno y coseno varias veces).

   Sea E la intersección de AD y BC. Comencemos observando que, por observación del triángulo ECD, el ángulo CED es de 180° - 40° - 45° = 95°. Luego el ángulo DEB es de 180° - 95° = 85°.
   Tracemos la altura del triángulo CDE desde D, con pie de altura F.



   Por observación de los triángulos CDF y EDF, tenemos que $DF = 3\ sen\ 40° = DE\ sen\ 85°$. Entonces $DE = \frac{3\ sen\ 40°}{sen\ 85°} \approx 1.94$.

   A continuación desplazaremos la atención al triángulo BDE y repetiremos el procedimiento que acabamos de hacer con CDE. Como $DEB = 85°$ y $BDE = 58°$, se deduce que $EBD = 37°$. Trazamos la altura de BDE desde E con pie G.



Por observación de los triángulos EGD y BGE, tenemos que $EG = DE\ sen\ 58° = EB\ sen\ 37°$. Entonces

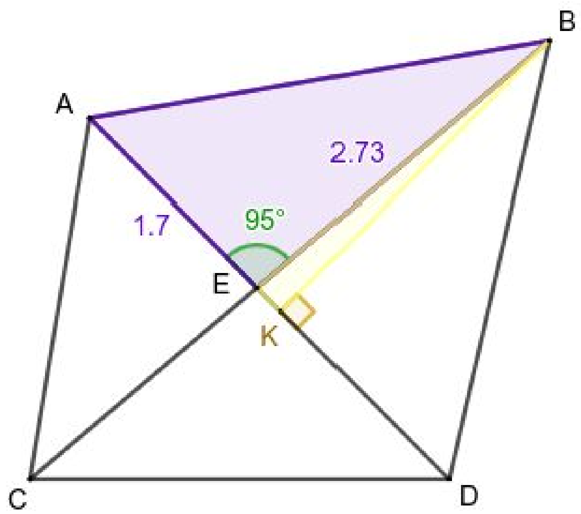
$$EB = \frac{DE\ sen\ 58°}{sen\ 37°} \approx 2.73\ .$$

Ahora repetimos lo hecho pero con el triángulo CDE. Trazamos la altura desde E con pie H y, observando los triángulos CHE y EHD, obtenemos $CE\ sen\ 40° = DE\ sen\ 45°$. Luego $CE = \frac{DE\ sen\ 45°}{sen\ 40°} \approx 2.13$.

A continuación pasamos al triángulo CEA. Para eso necesitamos la amplitud del ángulo CAE, que por observación del triángulo CEA tenemos que es 180° - 85° - 40.5° = 54.5°. Trazamos la altura desde E con pie J y, observando los triángulos CJE y JEA, deducimos que $AE\ sen\ 54.5° = CE\ sen\ 40.5°$. Entonces

$$AE = \frac{CE\ sen\ 40.5°}{AE\ sen\ 54.5°} \approx 1.7\ .$$

Finalmente veamos el triángulo AEB. Este caso es distinto, ya que conocemos dos lados del triángulo y el ángulo que forman, en lugar de un lado y dos ángulos. Observemos que el ángulo BEA es de 95° y tracemos la altura desde B con pie K.



Por Pitágoras aplicado al triángulo EKB , tenemos que $EB^2 = EK^2 + KB^2$. Nuevamente, por Pitágoras aplicado al triángulo AKB , tenemos que $KB^2 = AB^2 - AK^2 = AB^2 - (AE - EK)^2$. Sustituyendo KB en la primera igualdad, tenemos

$$\begin{aligned} EB^2 &= EK^2 + AB^2 - (AE - EK)^2 \\ &= EK^2 + AB^2 - AE^2 + 2AE \cdot EK - EK^2 \\ &= AB^2 - AE^2 + 2AE \cdot EK \,. \end{aligned}$$

Entonces $AB^2 = EB^2 + AE^2 - 2AE \cdot EK \approx 10.34 - 3.4\,EK$. Observando el triángulo EKB , obtenemos que $EK = BE \cos 85° \approx 0.24$. Por lo tanto,

$$AB^2 = EB^2 + AE^2 - 2AE \cdot EK \approx 9.52 \,.$$

Esto significa que $AB \approx 3.09$ kilómetros.