Trigonometría en triángulos rectángulos

1 Triángulos rectángulos

Se denomina *triángulo rectángulo* a cualquier triángulo con un *ángulo recto*, es decir, un ángulo de 90 grados.

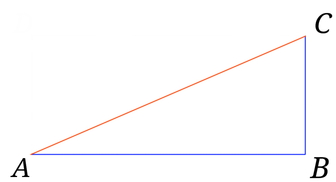

Figure 1: Un triángulo rectángulo

Todo triángulo rectángulo se obtiene como la mitad de un rectángulo partido por su diagonal.

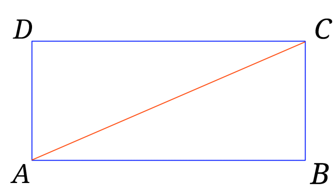

Figure 2: Mitad de rectángulo rectángulo

Se denomina *hipotenusa* al lado mayor del triángulo, el lado opuesto al ángulo recto. Los otros lados se llaman *catetos*.

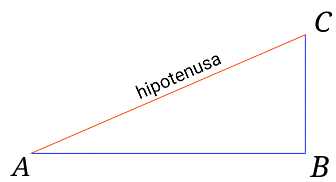

Figure 3: Hipotenusa

Ejemplo de uso de triángulo rectángulo – Triángulos rectángulos aparecen en muchos problemas de astronomía. Por ejemplo, es famosa la historia del astrónomo Aristarco de Samos [1] (un astrónomo griego del tercer siglo antes del Cristo) que tuvo una idea brillante para estimar cuanto más lejos era la Tierra del Sol que de la Luna. Aunque su medida no era suficientemente precisa, y que no consiguio hallar una buena estimación, la idea geométrica era perfecta y muy original.

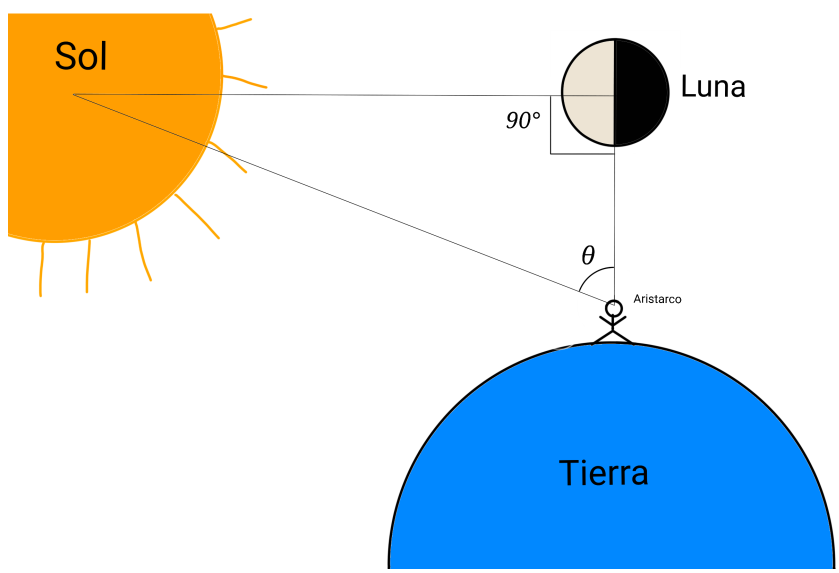

Figure 4: Aristarco de Samos y su triángulo

Una vez, este señor, Aristarco, vio media luna de día (entonces vio media luna y sol simultaneamente). Él dedujo que, si uno acepta que la luna es una bola y que él ve media bola en el cielo, es que los rayos de sol que llegan a la luna y el rayo de luna que le llega forman un ángulo de 90 grados. En otras palabras el triángulo formado por la Tierra, el Sol y la Luna en este momento forman es un *triángulo rectángulo*.

Luego de este descubrimiento él midió el ángulo en donde estaba él: es el ángulo θ (esta letra

[1] Gracias a Pablito Lessa para este ejemplo: ver https://www.youtube.com/watch?v=IH8ppIQYB5Y&list=PLaUac6hC9joJFvRgkMXz47OFbbddbXQco&index=5&t=0s por una explicación estupenda

griega se lee Theta) de la fígura 4. Vamos a ver que conocer este ángulo da inmediatamente la información que él quería: saber cuanto más lejos está la Tierra del Sol que de la Luna.

2 Semejanza

El tríangulo de Aristarco tiene dimensiones astronómicas. Una noción muy útil, para trabajar con tales triángulos, es la noción de *semejanza*. Basicamente dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, aunque sus tamaños sean distintos.

Definición Se dice que *son semejantes* dos triángulos ABC y $A'B'C'$ de ángulos respectivos α, β, γ [2] y α', β', γ' si existe un número positivo $r > 0$, llamado razón de semejanza, tal que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = r.$$

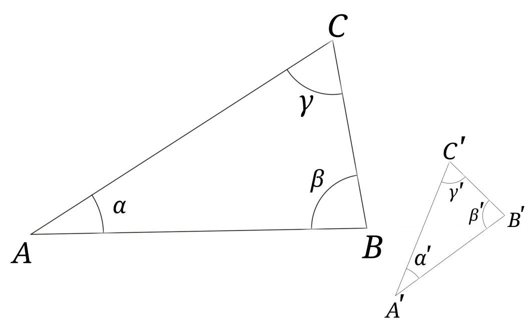

Figure 5: Triángulos semejantes

Teorema *Los triángulos ABS y $A'B'C'$ son semejantes si y solo si sus ángulos son iguales:*

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta', \qquad \gamma = \gamma'.$$

Este teorema se prueba con el teorema de Thalès. No daremos la prueba, sino un dibujo que explica la idea.

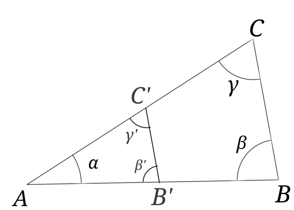

Figure 6: Si los ángulos son iguales entonces, en la figura de arriba, las rectas (BC) y $(B'C')$ son paralelas: entonces por Thalès $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$. El recíproco se prueba de la misma manera.

[2] estas letras griegas se leen asi: α: alpha. β: beta. γ: gamma.

Observación La suma de los ángulos de un triángulos siempre vale 180°. Entonces: *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces tienen los TRES ángulos iguales.* **Ejercicio:** Probarlo.

Deducimos que *dos triángulos que tienen dos ángulos iguales son semejantes.*

Volvamos al triángulo de Aristarco de Samos. Es un triángulo rectángulo TSL (T por Tierra, S por Sol, L por Luna) con un ángulo $\theta = \widehat{STL}$. Como lo mencionamos antes, las longitudes de los lados son astronómicas

$$LS = \text{distancia} \;\; \text{Luna-Sol}$$

$$TS = \text{distancia} \;\; \text{Tierra-Sol}$$

$$TL = \text{distancia} \;\; \text{Tierra-Luna}$$

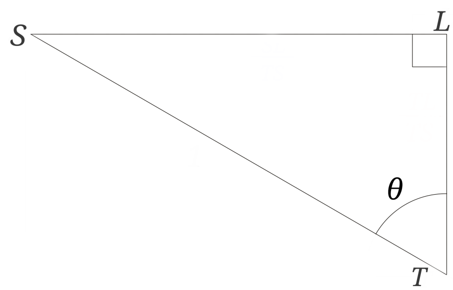

Figure 7: El triángulo de Aristarco

Aristarco quiere calcular la razón

$$\frac{TL}{TS}.$$

Su idea era entonces de considerar un triángulo semejante a TSL que se pueda dibujar: para hacer esto, basta conocer el ángulo θ. Podemos entonces considerar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale 1 y con un ángulo θ. Como este triángulo es semejante a SLT sus dos catetos miden

$$\frac{TL}{TS} \quad \text{y} \quad \frac{SL}{TS}.$$

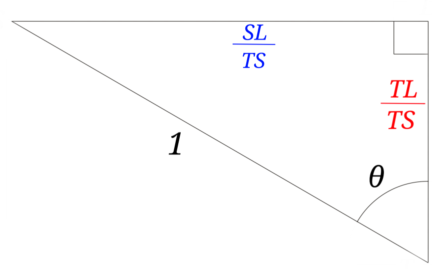

Figure 8: Un triángulo semejante

Aristarco estimó que $\theta = 87°$, y, dibujando el triángulo de la Figura 9 y midiendo los catetos, dedujó que

$$\frac{TL}{TS} = \frac{1}{20},$$

concluyendó que el Sol estaba 20 veces más lejos que la Luna. Obviamente, no tenía la tecnología para medir precisamente el ángulo θ: con medidas más precisas uno encuentra que en realidad, el Sol está 400 veces más lejos que la Luna.

Moral Acabamos de ver que hay una relación entre un ángulo de un triángulo rectángulo y los cocientes entre los lados, que son llamadas *razones trigonométricas*.

3 Razones trigonométricas

Hipotenusa, lado adyacente, lado opuesto Consideremos un triángulo ABC rectángulo en C y notemos θ el ángulo $\widehat{ABC}$.

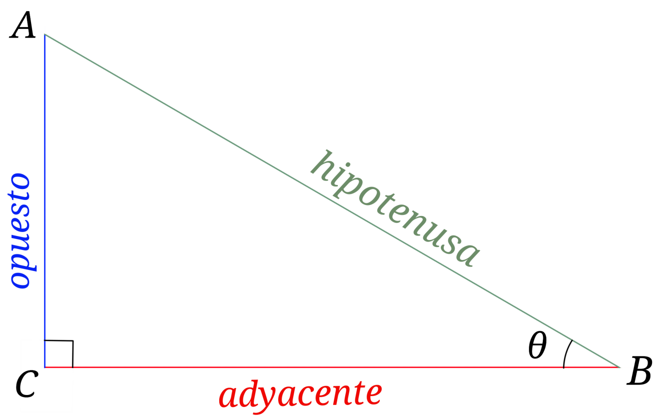

Figure 9: El triángulo ABC

Ya vimos que el lado AB se llama *hipotenusa*. El cateto BC se llama *lado adyacente a θ*. El cateto AC se llama *lado opuesto a θ*.

Razones trigonométricas En el triángulo rectángulo ABC las razones trigonométricas son:

El seno de θ que es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad (SOH)$$

El coseno de θ que es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa:

$$\cos(\theta) = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad (CAH)$$

La tangente de θ que es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente:

$$\tan(\theta) = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} \qquad (TOA)$$

Una manera de acordarse de estas formulas es con la palabra SOH-CAH-TOA. Les recomiendo aprenderla...

Fórmula importante Por definición tenemos

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Demostración. Tenemos

$$\tan(\theta) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \times \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \operatorname{sen}(\theta) \times \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

En la igualdad de arriba, simplificamos por el termino hipotenusa. □

Ejercicio Qué razon trigonométrica calculó Aristarco? El seno de θ? El coseno de θ? La tangente de θ?

Ejemplo Consideremos el triangúlo rectángulo ABC rectángulo en C, el ángulo $\theta = \widehat{ABC}$ tales que los lados

$$AC = 3, \qquad BC = 4, \qquad AB = 5.$$

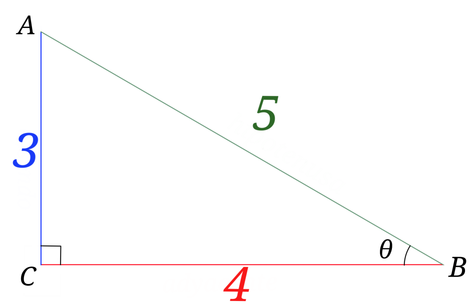

Figure 10: El triángulo ABC

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{3}{5}, \qquad \cos(\theta) = \frac{4}{5}, \qquad \tan(\theta) = \frac{3}{4}.$$

Ejemplo de cálculo de longitud Consideremos el triangúlo rectángulo ABC rectángulo en C. Y supongamos que

$$\widehat{ABC} = 65°, \quad \text{y}, \quad BC = 5.$$

Uno quiere hallar los valores de

$$b = AB, \quad \text{y}, \quad c = AC.$$

Ver la figura 15.

Primero, identifiquemos los catetos y la hipotenusa. La hipotenusa es el lado AB: su longitud es b por definición. El cateto adyacente al ángulo $\widehat{ABC}$ es BC: su longitud vale 5. Finalmente, el cateto opuesto al ángulo $\widehat{ABC}$ es AC: su longitud es c. Acordemos de la palabra SOH-CAH-TOA y veamos que

$$\tan(65°) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{5}.$$

El valor de $\tan(65°)$ se puede calcular con una calculadora: es igual a $\tan(65°) \simeq 2,145$.

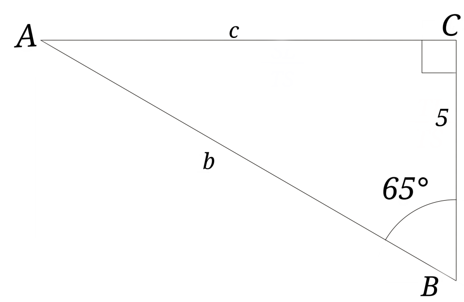

Figure 11: Ejercicio

Uno deduce que

$$c = 5\tan(65°) \simeq 10,725.$$

Tenemos también que

$$\cos(65°) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{b}.$$

El valor de $\cos(65°)$ se puede calcular con una calculadora: es igual a $\cos(65°) \simeq 0,423$. ENtonces:

$$b = \frac{5}{\cos(65°)} \simeq \frac{5}{0,423} \simeq 11,82.$$

Observe que los valores que encontramos son coherentes: la hipotenusa $b \simeq 11,82$ es el lado más largo del triángulo.

4 Ángulos complementarios

Sea ABC un triángulo rectángulo en C y $\theta = \widehat{ABC}$.

Definición El ángulo $\alpha = \widehat{CAB}$ se llama *ángulo complementario de* θ.

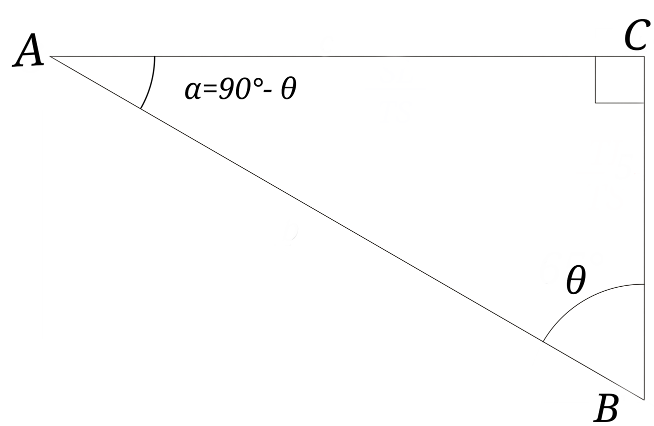

Figure 12: Ángulo complementario

Observación Similarmente, el ángulo complementario de α es θ.

Teorema *Tenemos la importante fórmula*

$$\alpha = 90^\circ - \theta.$$

Demostración. Los ángulos de ABC son α, θ y 90°. Pero sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo vale 180°. Entonces

$$90^\circ + \theta + \alpha = 180^\circ.$$

Deducimos que

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + \theta) = 180^\circ - 90^\circ - \theta = 90^\circ - \theta.$$

□

Teorema *Si α es el ángulo complementario de θ entonces*

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\theta),$$
$$\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(\theta),$$
$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\tan(\theta)}.$$

Demostración. Dejamos la prueba en ejercicio. Noten que el cateto opuesto a α es el cateto adyacente a θ y que el cateto adyacente a α es el cateto opuesto a α. □

5 Identidad pitagórica en trigonometría

Vamos a recordar el famoso teorema de Pitágoras y dar una prueba.

Teorema de Pitágoras *Sea un triángulo reactangulo cuya hipotenusa mide c, y cuyos catetos miden a y b. Entonces*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

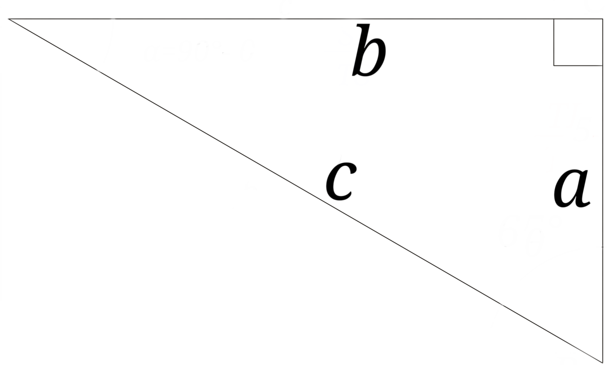

Figure 13: Teorema de Pitágoras

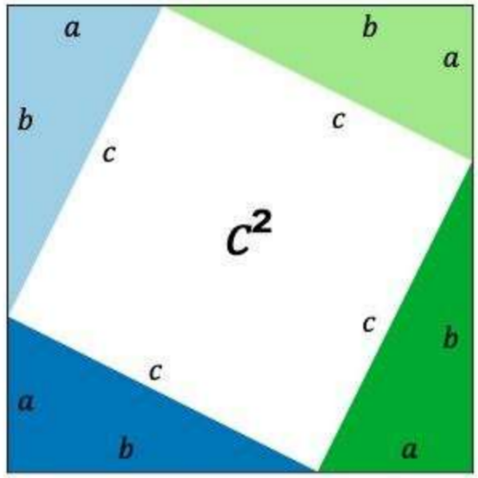

Figure 14: Teorema de Pitágoras

Demostración. Consideremos un cuadrado de lado $a+b$ en el cual inscribimos un cuadrado de lado c como abajo.

Podemos calcular el área del cuadrado de lado $a+b$ de dos maneras. Llamemos $\mathcal{A}$ este área. Tenemos por definición

$$\mathcal{A} = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Luego, se ve que es la unión de un cuadrado de lado c y de cuatro triángulos rectángulos de hipotenusa c y catetes a y b (son copias del triángulo del enunciado del teorema). Llamemos $\mathcal{C}$ el área del cuadrado de lado c y $\mathcal{R}$ el área del triángulo de hipotenusa c y catetes a y b. Tenemos:

$$\mathcal{C} = c^2 \qquad \text{(fórmula del área de un cuadrado)}$$

$$\mathcal{R} = \frac{ab}{2} \qquad \text{(el triánguo rectángulo se obtiene como la mitad de un rectángulo de lados a y b)}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{C} + 4\mathcal{R} \\ &= c^2 + 4 \times \frac{ab}{2} \\ &= c^2 + 2ab. \end{aligned}$$

Recapitulando, encontramos:

$$c^2 + 2ab = \mathcal{A} = a^2 + b^2 + 2ab,$$

de donde deducimos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Vamos ahora a deducir la fórmula más importante de la trigonometría.

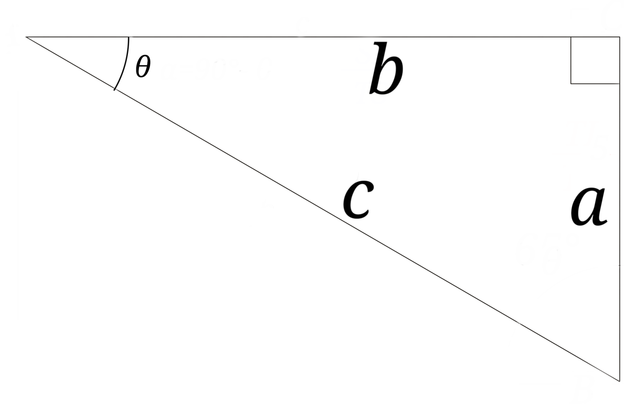

Figure 15: Triángulo importante

Teorema

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1.$$

Demostración. Consideremos el siguiente triángulo con hipotenusa c, catetos a y b y ángulo θ. El cateto adyacente a θ es b y el opuesto es a. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{a}{c} \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta) = \frac{b}{c}.$$

Deducimos

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Pero por el Teorema de Pitágoras tenemos $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

□