Círculo trigonométrico

1. Radianes

1.1. Definición de radián

En este curso (y en toda la Licenciatura en Matemática), los ángulos serán expresados en radianes. La definición de radián se relaciona con las longitudes de arco y los radios de círculos.

Para explorar esta definición, comencemos con un círculo de radio 1 y consideremos cualquier ángulo θ al centro. Este ángulo determina un sector en el círculo (en el dibujo en verde). El sector abarca cierto arco sobre el círculo (en un verde más oscuro).

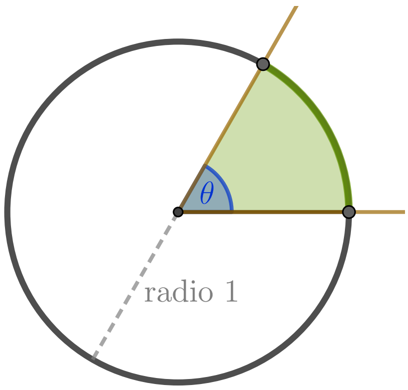


Figura 1: el arco de círculo abarcado por un ángulo θ en un círculo de radio 1.

La medida del ángulo θ en radianes se define como la longitud de este arco. Es decir, *el valor geométrico de un ángulo en radianes es, por definición, la longitud del arco que determina en un círculo de radio 1.*

Es importante observar que para que esta definición tenga sentido (para que nos permita comparar ángulos, por ejemplo) es importante que, para medir el ángulo, el círculo considerado siempre tenga radio 1 (que sea un círculo *unitario*). Si para un mismo ángulo θ en su lugar tomáramos otro círculo con otro radio, digamos R, el árco de círculo abarcado por θ será distinto (su longitud será la del arco abarcado en el de radio 1 multiplicada por R).

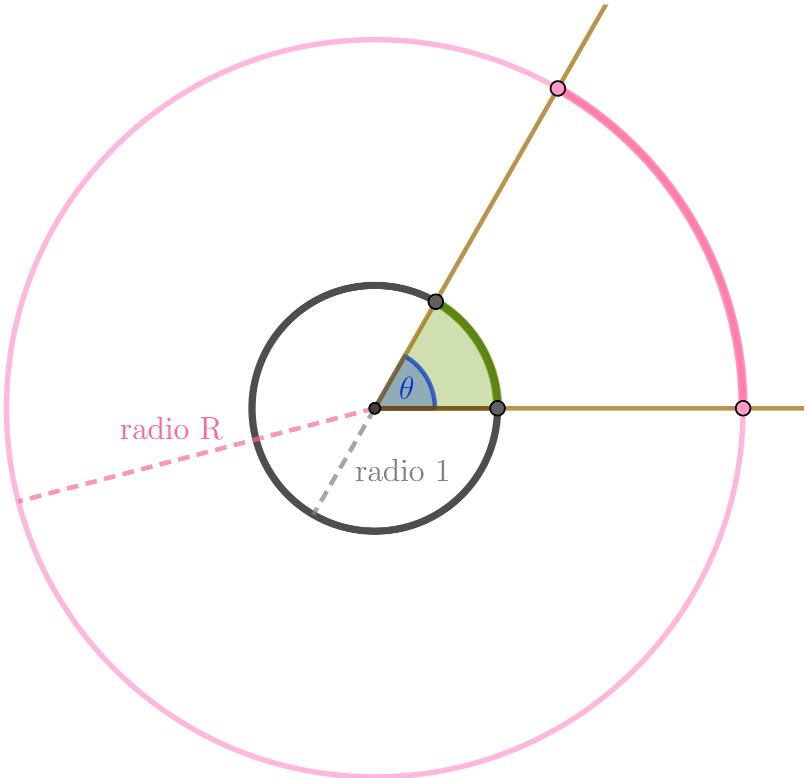


Figura 2: el arco de círculo abarcado por θ en un círculo otro radio es diferente.

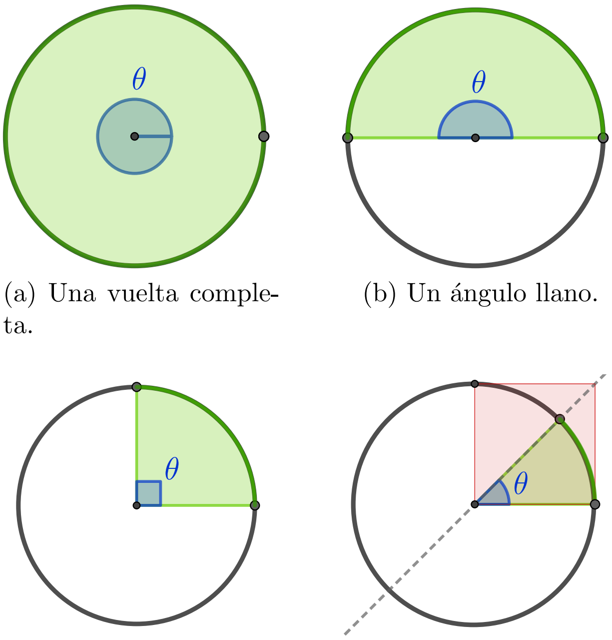
Notar que en particular un ángulo de un radián es uno que abarca un arco de longitud 1 en el círculo unitario (y un arco de longitud R en el círculo de radio R). Un ángulo de 1,35 radianes es uno que abarca un arco de longitud 1.35 en el círculo unitario (y un arco de longitud $1{,}35R$ en el círculo de radio R). Esto sugiere que, en general, *el valor geométrico de un ángulo en radianes es la cantidad de veces que el radio del cículo "entra" en el arco que este abarca.*

En adelante todos los cículos considerados serán de radio 1.

1.2. Algunos ángulos particulares expresados en radianes

El arco abarcado por una vuelta completa (esto es, un ángulo de 360°) es todo el círculo. Recordemos que el perímetro de un círculo de radio R es igual a $2\pi R$. Entonces el valor en radianes de una vuelta completa es 2π.

Un ángulo llano abarca la mitad del perímetro del círculo, así que mide π radianes. Un ángulo recto abarca la mitad de la mitad de uno llano, y por lo tanto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes. La mitad de un ángulo recto (el ángulo entre una diagonal de un cuadrado y uno de los lados) mide mide $\frac{\pi}{4}$ radianes.



(a) Una vuelta completa.

(b) Un ángulo llano.

(c) Un ángulo recto.

(d) La mitad de un ángulo recto.

Figura 3: amplitudes de algunos ángulos particulares en radianes.

También podemos determinar cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero en radianes. Un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales y, como para cualquier triángulo, estos tres ángulos a su vez suman 180° (cuyo valor en radianes ya vimos que es π). Entonces cada ángulo del triángulo mide la tercera parte, esto es, $\frac{\pi}{3}$.

Grados	**Radianes**
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$

Existe una relación de proporcionalidad entre los grados y los radianes, así que para pasar la medida de un ángulo de grados a radianes (o viceversa) se puede aplicar una regla de tres. Por ejemplo, calculemos cuánto vale 1° en radianes, partiendo de que $180° = \pi$ radianes:

$$\begin{array}{c|c} 180° & \pi \text{ radianes} \\ \hline 1° & ? \end{array}$$

Tenemos que $1° = \frac{1 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{180}$ radianes.

2. Orientación de ángulos

La definición de radián que acabamos de ver implica que todos los ángulos son positivos, ya que la medida de un ángulo en radianes se define como la longitud de cierto arco. A continuación nos proponemos asignarle un signo (positivo o negativo) a los ángulos.

Para esto elegiremos una *orientación* en el círculo. Una orientación del círculo es una dirección en la que decidimos que los ángulos crecen. Tenemos dos orientaciones en el círculo: la horaria y la antihoraria (o trigonométrica).

Figura 4: las orientaciones antihoraria (izquierda) y horaria (derecha).

Los nombres “horaria” y “antihoraria” aluden, como probablemente no sorprenda, al sentido en el que crecen los números de un reloj. Elegir una orientación en el círculo es acordar un sentido en el que consideraremos los ángulos crecen.

Lo que haremos ahora es considerar otra vez un círculo y elegir para este la orientación antihoraria (esta siempre será la orientación, a menos que se diga lo contrario). Tracemos una semirrecta partiendo del centro (en negro en la figura) y midamos dos ángulos, con la misma amplitud geométrica θ, a ambos lados de dicha semirrecta. Por cada ángulo dibujaremos una flecha como se muestra.

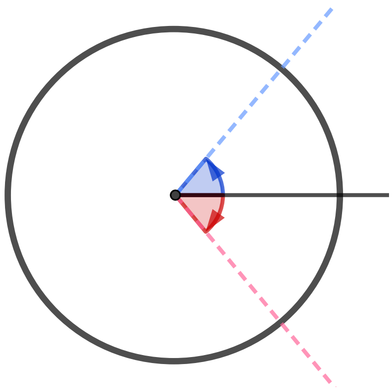


Figura 5: el arco de círculo abarcado por un ángulo θ en un círculo de radio 1.

Al ángulo azul le asignaremos el signo positivo ya que, según la orientación que acabamos de elegir, para pasar de la semirrecta fijada a la azul punteada hay que moverse en dirección creciente. De la misma manera, el ángulo rojo tendrá signo negativo, ya que el recorrido de la semirrecta negra a la roja punteada tiene sentido contrario al creciente. El ángulo azul tiene valor θ y el rojo tiene valor $-\theta$.

Un ángulo orientado es un ángulo con signo, y para indicarlo les dibujaremos una flecha el el sentido que corresponda.

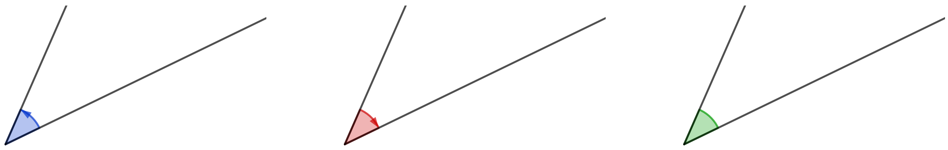


Figura 6: Un ángulo positivo (izquierda), negativo (centro) y no orientado (derecha).

Observar que al ángulo formado por dos semirrectas le podemos asignar tanto el positivo como el signo negativo.

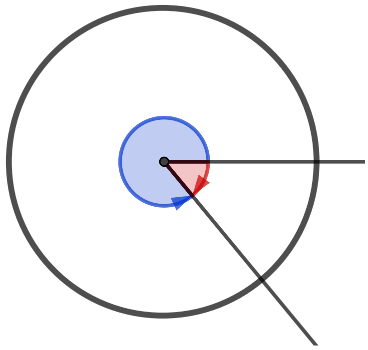


Figura 7: El ángulo orientado rojo tiene un valor negativo $-\theta$, mientras que el azul tiene el valor positivo $2\pi - \theta$.

3. El círculo trigonométrico

3.1. El seno y el coseno

Lo que haremos a continuación será extender las razones trigonométricas seno, coseno y tangente que vimos en la lección 1.

La definición que ya vimos refiere a triángulos rectángulos y a las medidas de sus lados y ángulos. Esto nos permite calcular el seno, coseno y tangente de los ángulos de un triángulo rectángulo. Estos ángulos son siempre agudos (a excepción, claro, del que es recto), ya que, como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°, un mismo triángulo no puede tener al mismo tiempo un ángulo de 90° y otro mayor que 90°. Entonces, con la definición ya vista sólo podemos calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos. La idea será ver cómo podemos definirlas para ángulos obtusos y para ángulos negativos.

Comencemos en el plano con coordenadas y ejes cartesianos. Recordemos que los ejes lo dividen en cuatro *cuadrantes*.

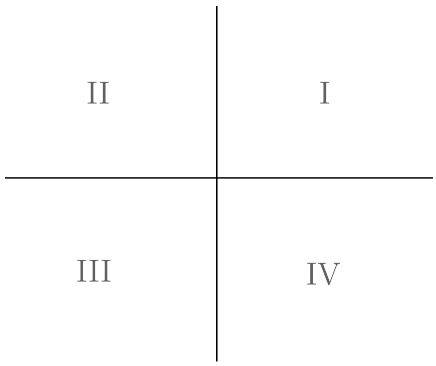


Figura 8: Los cuadrantes del plano cartesiano.

Vamos a dibujar el círculo trigonométrico: un círculo con centro en el origen $(0,0)$, radio 1, y al que le asignaremos la orientación antihoraria. También marcaremos una semirrecta "de origen" (en verde en la figura).

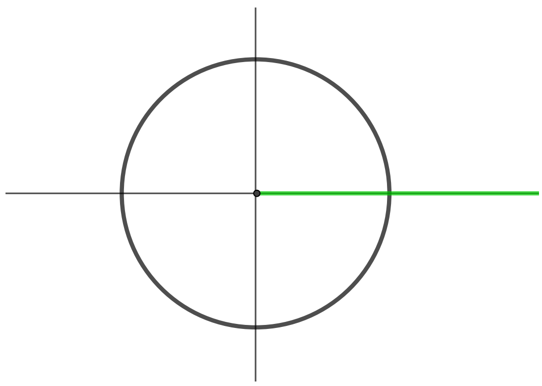
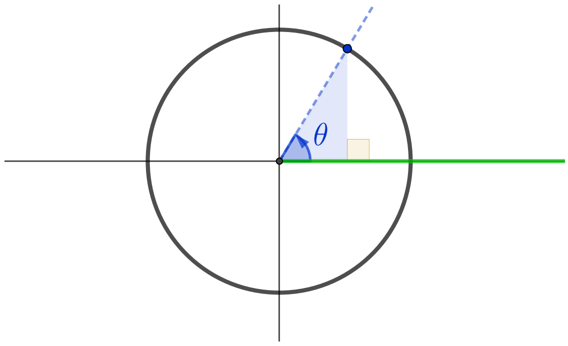


Figura 9: El círculo trigonométrico y la semirrecta de origen.

Marquemos un punto del círculo trigonométrico que esté en el primer cuadrante, de coordenadas, digamos, (a,b). A este punto le corresponden una semirrecta y el ángulo positivo que esta forma con la semirrecta de origen (digamos θ), cuyo valor está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.



Observemos el triángulo rectángulo resaltado en la figura. Las longitudes de sus catetos son las coordenadas del punto azul: el cateto horizontal tiene longitud a, y el vertical tiene longitud b. La hipotenusa mide lo mismo que el radio del círculo, que es 1. Las definiciones ya vistas de seno y coseno nos dicen que

$$\sin\theta = \frac{b}{1} = b \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{a}{1} = a.$$

Entonces las coordenadas del punto azul, son $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Lo anterior nos está indicando que *si elegimos un punto del cículo en el primer cuadrante y consideramos el ángulo θ asociado, el seno y el coseno de θ son las coordenadas de dicho punto.* Esta sugiere cómo podemos definir seno y coseno para un ángulo obtuso: ubicamos el punto correspondiente en el círculo y miramos sus coordenadas. Esta definición es válida para cualquier ángulo orientado, sea agudo, llano u obtuso, positivo o negativo.

Definición: si θ es un ángulo orientado y P es su punto asociado en el círculo trigonométrico, el coseno y el seno de θ son la abscisa y la ordenada de P, respectivamente.

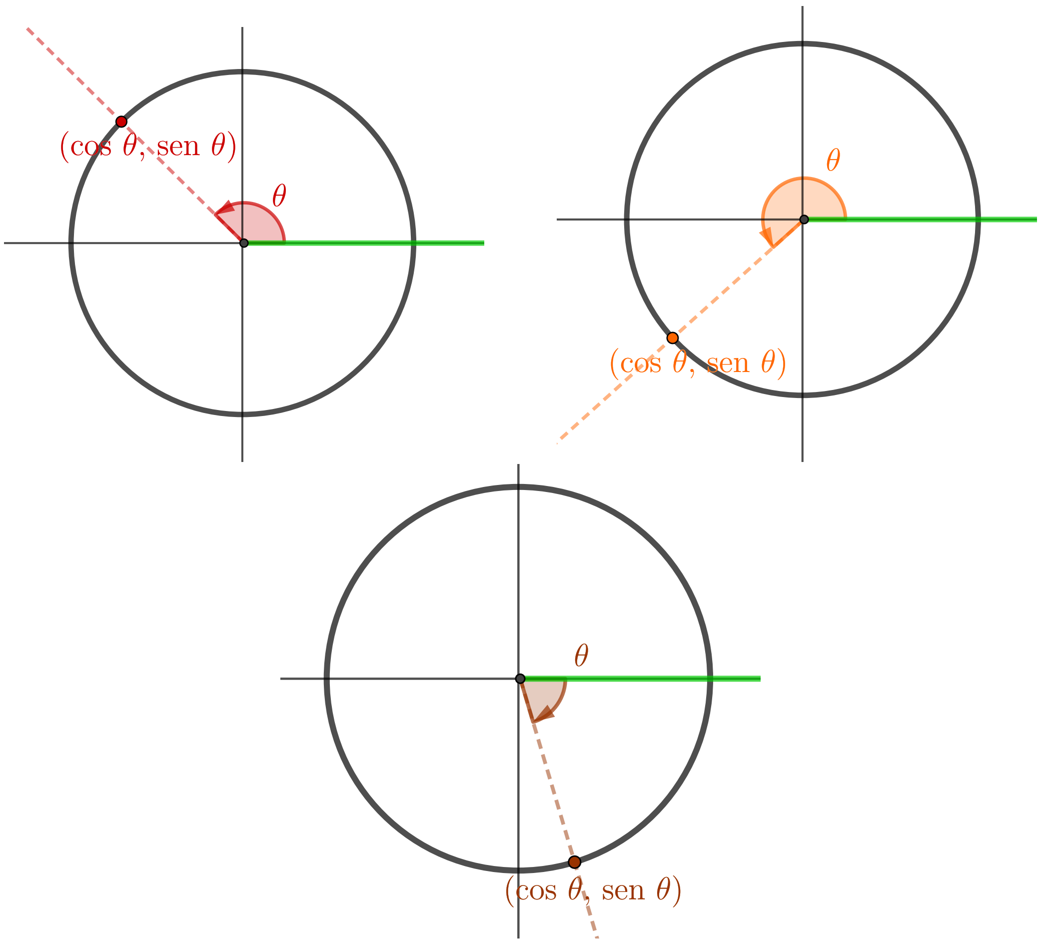
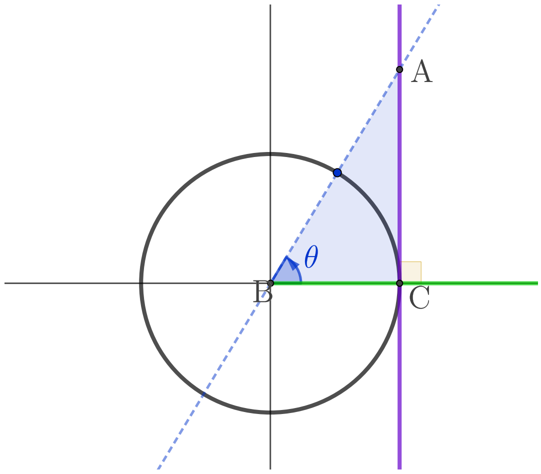


Figura 10: el seno y el coseno de ángulos obtusos y ángulos negativos

3.2. La tangente

Para extender la definición de tangente, volvamos al punto azul del primer cuadrante con el que empezamos esta sección y cambiemos la semirrecta azul por una recta. Trazaremos la recta vertical tangente al círculo trigonométrico en el punto $(1, 0)$ (en violeta en la figura). Esto determina otro triángulo rectángulo, resaltado en el dibujo.



Recordando la definición que ya teníamos para la tangente, nos queda

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = AC$$

(ya que $BC = 1$, porque es un radio del círculo). Esto se cumple para cualquier ángulo θ del primer cuadrante, a excepción de $\frac{\pi}{2}$ porque en este caso la recta azul no corta a la violeta.

Esto nos permite extender la definición de tangente a los ángulos del cuarto cuadrante (excepto $-\frac{\pi}{2}$) como la longitud del segmento AC, sólo que en ese caso le ponemos signo negativo, ya que A queda por debajo de C. De la misma forma podemos extender la definición a los ángulos de los demás cuadrantes, asignándole a la tangente uno u otro signo según si A queda por encima o por debajo de C.

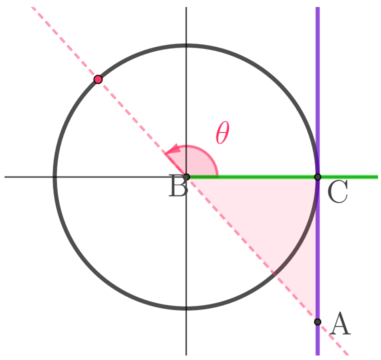


Figura 11: interpretación geométrica de la tangente de un ángulo del tercer cuadrante. En este caso, $\tan\theta$ es negativo.

Cuadrante	Signo de $\tan\theta$
I	positivo
II	negativo
III	positivo
IV	negativo

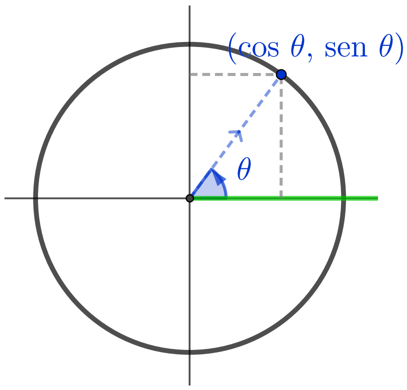
La tangente queda así definida para todos los ángulos excepto $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Para estos últimos, $\tan\theta$ no está definido.

4. Simetrías

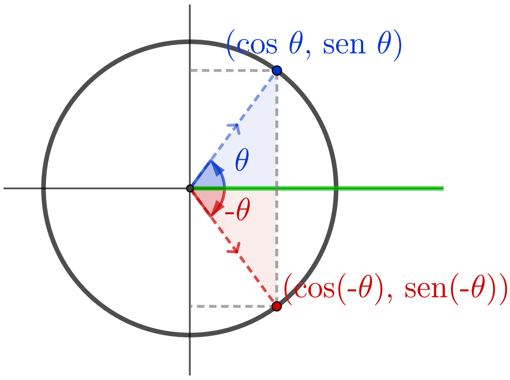
En esta última sección veremos qué pasa con las razones trigonométricas de un ángulo cuando le aplicamos algunas simetrías.

4.1. Simetría respecto al eje Ox

Consideremos cualquier ángulo positivo θ y su correspondiente punto en el círculo trigonométrico.



Si simetrizamos el punto azul con respecto al eje Ox, obtenemos otro punto (el punto rojo en la figura siguiente), que está en el círculo, ya que el círculo es simétrico. El ángulo correspondiente a este nuevo punto tiene la misma amplitud que θ y la orientación opuesta, es decir, es el ángulo $-\theta$. Nos interesa saber cuáles son el seno y el coseno de este ángulo.

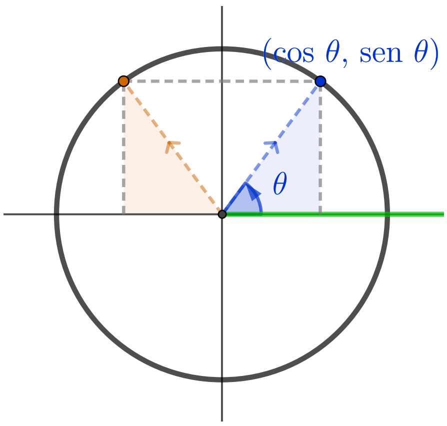


Como el punto azul y el punto rojo son simétricos respecto al eje Ox, están a la misma distancia este eje, así que los catetos verticales de los triángulos sombreados miden lo mismo. Por la misma razón, la distancia de ambos puntos al eje Oy también es la misma, y los catetos horizontales también son congruentes. Entonces

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta.$$

4.2. Simetría respecto al eje Oy

Ahora, en vez de simetrizar el punto azul respecto al eje Ox, veamos qué pasa si lo simetrizamos respecto a Oy. De nuevo, el simétrico del punto azul (el anaranjado) está en el círculo trigonométrico.



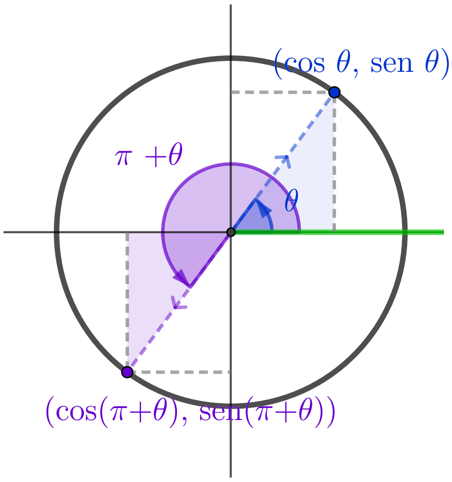
Los triángulos azul y anaranjado son simétricos, así que sus lados correspondientes son iguales. Entonces el punto anaranjado tiene coordenadas $(-cos\theta, \sin\theta)$.

Por otro lado, por simetría entre ambos triángulos, el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto horizontal del triángulo anaranjado es igual a θ. Por lo tanto, el punto anaranjado es el correspondiente al ángulo $\pi - \theta$, y luego tiene coordenadas $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta))$. Igualando obtenemos

$$\cos(\pi - \theta) = -cos\theta \quad \text{y} \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta.$$

4.3. Rotación de ángulo π

A continuación veamos qué pasa si a θ le aplicamos una rotación de π radianes. Al aplicarle la rotación, el punto azul pasa a ser el punto violeta, correspondiente al ángulo $\pi + \theta$.



Como en los casos anteriores, rotar un triángulo no cambia las longitudes de sus lados, así que los triángulos sombreados son congruentes. Igualando las longitudes de sus catetos, se deduce que

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \quad \text{y} \quad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta.$$