Matemática 0 (2020)

Repartido 3 de ejercicios para el tema 2

1. a) Bosquejar el gráfico de la función $f(x) = cos(x + \frac{\pi}{6})$, definida en el intervalo $[0, 4\pi)$.
   b) ¿Cuál es su período?
   c) Identifica los intervalos en los que es creciente y en los que es decreciente.

2. De las siguientes ecuaciones, indicar cuáles tienen soluciones en los números reales.
   $sen\, x = 0.2$, $sen\, x = -3$, $sen(2x) = \frac{3}{2}$, $cos\, x = -1$,
   $cos(-x) = \frac{1}{2}$, $tan\, x = 1.2$, $tan\, x = \frac{\pi}{2}$. $cos\, x = \pi$.

3. Averiguar cuál es el mayor intervalo en el que se pueden definir las siguientes funciones:
   $f(x) = 2\, arccos\left(\frac{2x-1}{3}\right)$
   $g(x) = arctan(sen(2x))$
   $h(x) = \frac{1}{arcsen(x)-1}$
   $j(x) = sen\left(\frac{1}{arccos(x)}\right)$

4. a) Demostrar que para todo $x \in [-1, 1]$ se cumple que
   $sen(arccos\, x) = \sqrt{1 - x^2}$, $cos(arcsen\, x) = \sqrt{1 - x^2}$.
   b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que
   $sen(arctan\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $cos(arctan\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   c) Usar lo anterior para obtener fórmulas similares para $tan(arcsen\, x)$ y $tan(arccos\, x)$.

5. Encontrar una fórmula para expresar $sen(2\alpha)$, $cos(2\alpha)$, $sen(\alpha + \beta + \gamma)$ y $cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en función del seno y el coseno de α, β y γ.

6. Calcular (sin calculadora):
   a. $tan\left(\frac{\pi}{2} + arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$
   b. $sen\left(\pi + arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
   c. $sen\left(arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$
   d. $cos(arctan(2))$
   e. $cos\left(arcsen\left(\frac{1}{3}\right)\right)$
   f. $\frac{1}{cos^2(arctan(-3))} + \frac{1}{sen^2(arctan(-3))}$

7. Considerar la función $g(x) = \frac{cos\, x+1}{2}$. Si $g(\alpha) = \frac{4}{5}$, indicar el valor de las siguientes imágenes:
   $g(\alpha + 2\pi)$, $g(\alpha - 2\pi)$, $g(\alpha + 5\pi)$, $g(4\pi - \alpha)$.

8. Considerando la función $h(x) = tan\, x$, expresar los siguientes números en función de $h(a)$ y $h(b)$:

   $h(-a)$, $h(a+\pi)$, $h(\pi - b)$, $h(b+3\pi)$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones:
   a. $cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donde $-\pi \le x < \pi$
   b. $sen\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donde $0 \le x < 2\pi$
   c. $tan(2x) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, donde $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}$
   d. $arcsen(x+1) = arccos\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$, donde $x \in [-2, 0]$
   e. $2\, cos\, x = \frac{3\, sen\, x}{cos\, x}$, donde $0 \le x < 2\pi$
   f. $\sqrt{2}\, sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = tan(-x)$, donde $-\pi \le x < \pi$.

10. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas:
   a. $\frac{1}{cos\, x} - \frac{cos\, x}{1+sen\, x} = tan\, x$ para todo $x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$.
   b. $\frac{1-sen^4 x}{cos^2 x} = 2 - cos^2 x$ para todo $x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$.
   c. $\frac{sen(\alpha)\, cos(\alpha)}{cos^2 \alpha - sen^2 \alpha} = \frac{tan\, \alpha}{1-tan^2 \alpha}$ para todo $\alpha \in (-\pi/4,\ \pi/4)$.

   ¿Alguna de ellas se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$?