Capítulo 1

Números complejos

Comenzaremos este texto trabajando con los números complejos, que si bien serán de utilidad en algunos de los próximos capítulos, es el capítulo que tiene menos contenido de cálculo en sí, ya que no hay límites, continuidad, ni derivadas.

1.1. Introducción y propiedades básicas

De los conjuntos numéricos que estudiaremos en este curso ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), el de los números complejos es quizás el único que tiene un origen histórico bien marcado, y que además es muy interesante.

El comienzo se da en Italia en el siglo *XVI*. Primero Gerolamo Cardano publica un libro describiendo una solución algebraica para hallar raíces de polinomios de tercer y cuarto grado[1]. Cuando se aplicaba este método al ejemplo histórico $x^3 = 15x + 4$, la expresión resultaba $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. En este punto, Cardano decía que la fórmula no era aplicable en estos casos, pues aparecía $\sqrt{-121}$ que no tenía sentido. Fue el también italiano Rafael Bombelli quien comenzó a manipular algebraicamente estas expresiones, pasando por alto que no tenían sentido, y llegó a que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 4,$$

que era efectivamente una solución conocida de $x^3 = 15x + 4$.

Bombelli listó las operaciones aritméticas con estas expresiones, que serían las reglas para operar con estos números “imaginarios” como los llamó René Descartes, debido a que “su naturaleza es imposible [...] y solamente existen en la imaginación”, como decía Euler.

[1] Aunque la fórmula en realidad fue comunicada a Cardano por otros matemáticos italianos. Ver nota histórica al final de este capítulo

Muchas veces se pone a la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ como el origen histórico de los números complejos. Sin embargo, fueron las ecuaciones cúbicas las que llevaron al desarrollo de estos números.

Se trabajaba entonces con expresiones como $2 + 3i$ (aunque la notación no era esta), y se operaba con ellas como si fueran números reales, con la particularidad que $i^2 = -1$. Así, el producto de dos complejos sería:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{1.1}$$

Desde el punto de vista operativo, esto es suficiente para poder trabajar con los números complejos. De hecho, durante casi tres siglos, muchos matemáticos (incluyendo a Leibnitz, Bernoulli, D'Alembert, Lagrange, y Euler, quien fue el que introdujo la notación i para la unidad imaginaria) utilizaron estos números, manipulando las expresiones según las reglas dadas pero sin una definición formal, dando lugar a resultados de gran importancia. Fueron Gauss y Hamilton los que dieron una definición algebraica rigurosa de los números complejos como pares ordenados de reales, que es la que se utiliza hasta hoy.

Daremos entonces esta definición formal, pero rápidamente volveremos a utilizar la notación más cómoda de $a + bi$, sabiendo que todas las operaciones y propiedades están rigurosamente fundamentadas.

Definición 1.1. Un número complejo es un par ordenado de números reales (a,b).

Observar que, al ser un par ordenado, no es lo mismo el número $(2,3)$ que $(3,2)$.

Dado un número complejo $z = (a,b)$, su primera componente a se denomina parte real, y se denota $a = Re(z)$. La segunda componente se denomina parte imaginaria, y se escribe $b = Im(z)$.

Las operaciones se definen para que este conjunto copie el comportamiento que esperamos (es decir, para que el producto sea en definitiva el de la ecuación (1.1)).

Definición 1.2. Sean (a,b) y (c,d) dos números complejos. Entonces:

- Decimos que $(a,b) = (c,d)$ sii $a = c$ y $b = d$.
- Definimos la suma como $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.
- Definimos el producto como $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Es fácil chequear que las operaciones así definidas son asociativas, conmutativas, y cumplen la propiedad distributiva. También se puede verificar que el elemento $(0,0)$ es el neutro de la suma, que $(1,0)$ es el neutro del producto, y que tenemos opuesto e inverso. Es decir, el conjunto de números complejos, con las operaciones que recién definimos, cumple con todos los Axiomas de cuerpo.

Ejercicio 1.3
Verificar que, dado un complejo (a,b), su opuesto está dado por $(-a,-b)$, y en caso de ser $(a,b) \neq (0,0)$, su inverso está dado por $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Notar que en la definición no aparece el símbolo i ni $\sqrt{-1}$. Es decir, hemos hecho una definición algebraica, formal, que describe el *comportamiento* de los números complejos, las reglas de manipulación que se usaron desde el siglo *XVI*, pero sin incluir explícitamente las raíces de números negativos.

Observemos también que, al estar definidos como pares ordenados de números reales, no podemos ver directamente la inclusión de los números reales en este nuevo conjunto, como sí lo podíamos hacer con $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$, o con $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ por ejemplo. Sin embargo, podemos *identificar* a los reales con los números complejos de la forma $(a,0)$. En efecto, si tomamos dos números de esa forma, $(a,0)$ y $(b,0)$, su suma $(a+b,0)$ y su producto $(ab,0)$ también tienen componente imaginaria nula, y copia la estructura operativa que teníamos en los reales. Si llamamos C_0 a este conjunto de números complejos que solamente tienen parte real, entonces tenemos una función $f : \mathbb{R} \to C_0$ que justamente a cada real a le asigna el número complejo $(a,0)$. Tenemos entonces una copia[2] de los números reales adentro de $\mathbb{C}$, y en este sentido entonces, podemos pensar que estamos agrandando el cuerpo de los números reales. A partir de ahora, cuando un número complejo tenga parte imaginaria nula (es decir, es un número de esta copia de los reales que llamamos C_0), vamos a escribirlo simplemente con su parte real: $(a,0) = a$, pero debemos tener en cuenta que estamos haciendo un abuso de notación. Escribiremos por ejemplo $z = 2$, pero sin olvidar que es en realidad el complejo $(2,0)$.

Ahora sí, llamemos i al número complejo $(0,1)$. Observemos que si multiplicamos al complejo $(0,1)$ por sí mismo, resulta

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Es decir, $i^2 = -1$, y por lo tanto i es solución de $x^2+1=0$. Esta ecuación, como sabemos, no tiene solución en los reales. La situación es más extrema todavía: todo polinomio de grado n en los complejos, tiene n raíces. A este resultado se lo conoce como Teorema Fundamental del Álgebra, y la primeras demostraciones esencialmente correctas las dieron D'Alembert (1746) y Gauss (1799), pero no lo demostraremos en este curso. Se dice entonces que el conjunto de los números complejos es un cuerpo algebraicamente cerrado[3].

[2]Esta función f conserva la estructura: lleva, por ejemplo, el producto en $\mathbb{R}$ en el producto de las imágenes en $\mathbb{C}$. Es en realidad lo que se denomina un isomorfismo, tanto $\mathbb{R}$ como C_0 tienen la misma estructura algebraica. Son copias idénticas, que se comportan igual, pero donde cada número tiene un "nombre" distinto en cada conjunto: a en uno, $(a,0)$ en el otro.

[3]Es decir, ya no hay que seguir agrandando el conjunto para poder resolver ecuaciones polinomiales. Cuando trabajamos en $\mathbb{Q}$, la ecuación $x^2-2=0$ no tiene solución, entonces agrandamos el conjunto a $\mathbb{R}$. Pero ahora la ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución, entonces agrandamos el conjunto a $\mathbb{C}$, y ahora todas las ecuaciones tienen solución en los complejos.

Tenemos entonces un cuerpo $\mathbb{C}$, que es una extensión de los reales, pero que se porta mejor con las ecuaciones polinomiales. ¿Perdimos algo en este camino? Es decir, ¿hay alguna propiedad de los reales que hayamos perdido en los complejos? Sí, lo que no podemos hacer en $\mathbb{C}$ es ordenarlos, de manera que el orden se "porte bien" con las operaciones. Los reales son entonces un cuerpo ordenado, y los complejos no. Pero los complejos son un cuerpo algebraicamente cerrado, y los reales no.

Con ese abuso de notación que nos permite escribir, por ejemplo $(2,0) = 2$, podemos escribir un complejo cualquiera $z = (a,b)$ descomponiendo en su parte real y su parte imaginaria:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$

A esta forma de escribir números complejos se le llama notación binómica.

La definición como par ordenado ya da una idea geométrica clara: interpretamos un número complejo como un punto en el plano, con coordenadas (a,b). Es decir, en el eje horizontal representamos la parte real, y en el eje vertical la parte imaginaria.

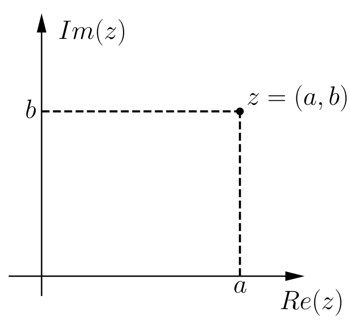

Figura 1.1: Representación del complejo $z = (a,b)$ en el plano.

Con esta interpretación, la suma de complejos no es más que la suma de vectores en el plano (o la regla del paralelogramo).

Identificamos a los complejos entonces como puntos en el plano, y los representamos mediante sus coordenadas, que son las partes real e imaginaria del complejo. Pero hay otras maneras de describir los puntos del plano, por ejemplo mediante su distancia al origen, y el ángulo que forman con el eje horizontal. Esto lleva a la siguiente definición y representación de los complejos:

Definición 1.4. Sea $z = a + bi$ un complejo. Llamamos *módulo* a la distancia de z al origen: $\sqrt{a^2 + b^2}$, y se denota $|z|$. Al ángulo φ que forma el vector (a,b) con el eje horizontal lo denominamos *argumento*.

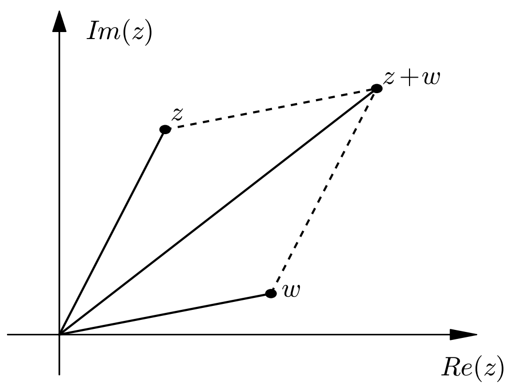

Figura 1.2: Suma de complejos.

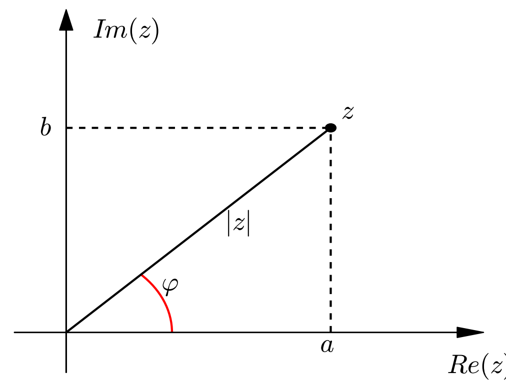

Figura 1.3: Módulo $|z|$ y argumento φ de un complejo z.

Observar que hay varios argumentos posibles, dado que el ángulo está determinado a menos de múltiplos de 2π. Es decir, podemos dar vueltas enteras y llegar al mismo punto en el plano: el complejo que tiene módulo 1 y argumento $\pi/20$ es el mismo que el complejo de módulo 1 y argumento $\pi/20+4\pi$. Para calcular el argumento de un complejo a partir de su expresión en notación binómica, notar que la tangente del ángulo que forma z con el eje real es $\frac{b}{a}$, es decir, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$. Pero hay que tener cuidado con esto:

Ejemplo 1.5
El complejo $z_1 = 1+i$ *tiene módulo* $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, *y argumento* $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. *Esto ya lo intuíamos a partir de la representación gráfica.*

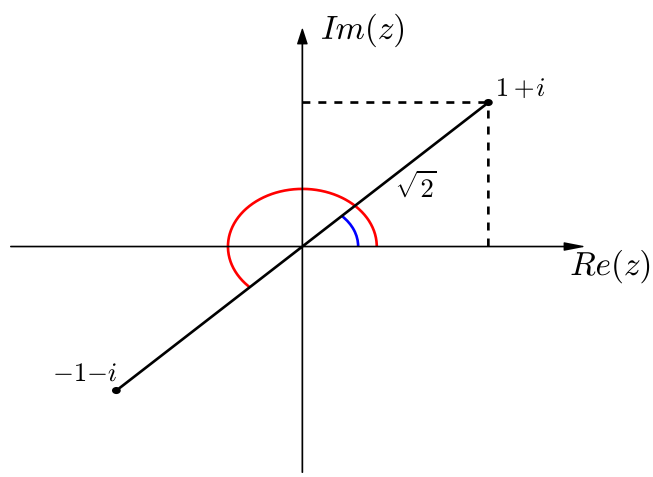

Figura 1.4: Complejos $1+i$ y $-1-i$.

Tomemos ahora el complejo $z_2 = -1 - i$.
Entonces su módulo es $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Cuando intentamos calcular su argumento, si no tenemos cuidado, resulta: $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Es decir, tendría el mismo módulo y argumento que z_1, por lo que algo debe estar mal, pues dos complejos con el mismo módulo y mismo argumento, necesariamente son iguales. Además, el resultado no tiene sentido con la representación gráfica que teníamos.

El problema es que la tangente tiene varias ramas, y estamos usando (en ambos casos) la que está definida en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, por lo que en algunos casos hay que corregir, sumando (o restando) π. En el caso de z_2 por ejemplo, debíamos sumar π al resultado. En general lo que se debe hacer es corroborar si el resultado tiene sentido con la representación gráfica, mirando en qué cuadrante se encuentra el complejo.

El módulo de un complejo es la distancia al origen, y por lo tanto no puede ser un valor negativo, por ejemplo. Listemos algunas de estas propiedades, que serán estudiadas más en detalle, y en un marco más general, en el capítulo 4.

Proposición 1.6. Sean z y w dos complejos. Entonces:

1. $|z| \geqslant 0$, y $|z| = 0$ sii $z = 0$
2. $|Re(z)| \leqslant |z|$; $|Im(z)| \leqslant |z|$.
3. $|zw| = |z||w|$; $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
4. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Ejercicio 1.7
Interpretar geométricamente las propiedades 2 y 4.

Ejercicio 1.8
Observar que, como el módulo de un complejo mide la distancia al origen, entonces $|z - z_0|$ es la distancia de z al complejo z_0. Si consideramos entonces los complejos z que verifican $|z - i| = 1$ (es decir, que distan exactamente 1 del complejo i), ¿qué forma geométrica determinan?. Escribir z en su notación binómica $z = a + bi$, y reconocer la ecuación resultante.

Si tenemos un número complejo dado con su módulo $|z|$ y ángulo φ, podemos calcular su parte real e imaginaria, simplemente proyectando el vector a cada uno de los ejes (ver de nuevo la Figura 1.3):

$$a = Re(z) = |z| \cos\varphi, \qquad b = Im(z) = |z| \sin\varphi. \tag{1.2}$$

Ejercitemos estos cálculos con algunos ejemplos.

Ejemplos 1.9

1. *El complejo* $z_1 = 1$ *tiene módulo* 1 *y argumento* 0 *(o* 2π*, o cualquier múltiplo de* 2π*).*
2. *El complejo* $z_2 = -1$ *tiene módulo* 1 *y argumento* π *(o* $-\pi$*, etc). En general, los números reales (con parte imaginaria nula), tienen argumento* 0 *si son positivos, o* π *si son negativos.*
3. *El complejo* $z_3 = i$*, la unidad imaginaria, tiene módulo* $|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$*, y argumento* $\pi/2$*.*
4. *El complejo* $z_4 = -i$ *tiene módulo* 1*, y argumento* $-\pi/2$ *(o* $3\pi/2$*).*
5. *El complejo* $z_5 = 1-i$ *tiene módulo* $|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$*, y argumento* $-\pi/4$*.*

Observar en particular que los números complejos 1, -1, i y $-i$ están ubicados en los vértices de un cuadrado (¡dibújelos!). Cuando un número complejo tiene parte real nula, como por ejemplo $2i$, se dice que es imaginario puro.

Ejercicio 1.10
¿Qué ángulos tienen los números reales como argumento? ¿Y los imaginarios puros?

Al poder representar los complejos en el plano, hay muchas propiedades geométricas que aparecen naturalmente. Hay una transformación en particular, que es la de simetrizar respecto al eje real, que tiene un nombre y notación concretas:

Definición 1.11. Dado un complejo $z = a+bi$, definimos su conjugado como $\overline{z} = a-bi$.

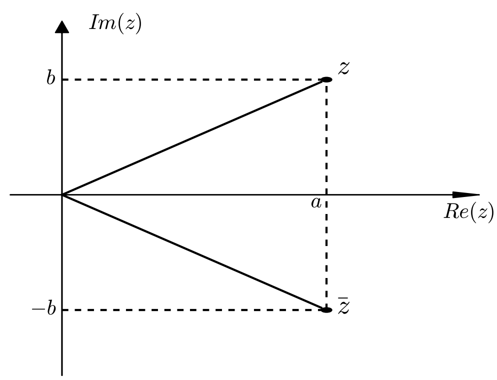

Figura 1.5: Conjugado $\overline{z}$ de un complejo.

Es una operación sumamente sencilla, y las demostraciones de todas las propiedades que listamos a continuación son simples cálculos, que quedan de ejercicio.

Proposición 1.12. Sean z y w dos complejos. Entonces:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
4. $z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z)$
5. $\overline{\overline{z}} = z$
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

La última propiedad en particular, permite realizar cálculos de cocientes de complejos de forma sencilla. Si queremos expresar $\frac{z}{w}$ en notación binómica, entonces multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador. De esta manera, en el denominador resulta $w\overline{w}$ que es real, y por lo tanto podemos separar parte real e imaginaria del cociente.
Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1.13

$$z = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i-2+2i}{|1-i|^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

En realidad, muy probablemente esta no sea la primera vez que nos enfrentamos a la noción de complejos conjugados. Cuando buscamos raíces de polinomios de segundo grado, aparece la expresión $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Cuando los coeficientes son tales que b^2-4ac es negativo, lo que obtenemos son dos raíces complejas conjugadas: $\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ y $\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Recíprocamente, si tomamos dos complejos conjugados, digamos $z_0 = a+bi$ y $\overline{z_0} = a-bi$, y consideramos el polinomio que los tiene como raíces, entonces resulta:

$$P(z) = (z-z_0)(z-\overline{z_0}) = z^2 - z(z_0+\overline{z_0}) + z_0\overline{z_0} = z^2 - 2az + |z_0|^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2.$$

Es decir, un polinomio con coeficientes reales.

El siguiente ejercicio da una generalización de este hecho.

Ejercicio 1.14
Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polinomio con coeficientes a_i reales.

1. *Demostrar que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.*
2. *Concluir que si el polinomio tiene una raíz compleja, entonces su conjugada también es raíz.*

Volvamos con algunos aspectos geométricos. Primero, observemos que si z tiene argumento φ, entonces su conjugado $\bar{z}$ tiene argumento $-\varphi$ (y el mismo módulo, ver Figura 1.5).

Tomemos ahora un número θ, que denotará un ángulo, y consideremos el complejo $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. El módulo de este complejo es $|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$. Es decir, es un complejo que está en la circunferencia de centro en el origen y de radio uno. Recíprocamente, para cualquier complejo $z = a + bi$ de módulo uno (es decir, que $a^2 + b^2 = 1$), su parte real es $a = \cos(\theta)$ y su parte imaginaria $b = \sin(\theta)$, siendo θ un argumento de z.

Es decir, podemos recorrer la circunferencia unidad con números complejos de la forma $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, haciendo variar θ entre 0 y 2π.

Si ahora tomamos un complejo $z \neq 0$ cualquiera, y lo dividimos entre su módulo, el complejo resultante $\dfrac{z}{|z|}$ tiene módulo uno (y no es otra cosa que un re-escalado del complejo z, es como proyectarlo a la circunferencia unidad). Por lo tanto, como está en la circunferencia unidad, es $\dfrac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, donde θ es un argumento de $\frac{z}{|z|}$ (o de z, pues tienen el mismo argumento).

Recuperamos entonces la expresión

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \tag{1.3}$$

que habíamos obtenido en (1.2). A esta notación de un complejo utilizando su módulo y argumento, se la denomina notación polar. A continuación vamos a definir la exponencial compleja, que entre otras cosas nos dará una notación polar más cómoda y compacta.

1.2. Exponencial compleja

La idea es buscar una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que extienda a la función exponencial real que conocemos, y que además cumpla con las propiedades clásicas de la exponencial. Daremos una definición que puede parecer arbitraria, pero veremos que cumple con las propiedades deseadas.

Definición 1.15. Dado un complejo $z = a + bi$, definimos la función exponencial compleja como $e^z = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$, donde e^a es la exponencial real conocida.

Lo primero que podemos observar es que si $z = a$ (es decir, con parte imaginaria nula), entonces $e^z = e^a(\cos(0) + i\sin(0)) = e^a$, por lo tanto en lo reales la exponencial recién definida coincide con la exponencial real.

Proposición 1.16. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos complejos, entonces se tiene $e^{z+w} = e^z e^w$.

Demostración. Calculemos por separado e^{z+w} y $e^z e^w$, y veamos que son iguales.

Como $z + w = (a + c) + (b + d)i$, entonces

$$e^{z+w} = e^{a+c}(\cos(b+d) + i\sin(b+d)) = e^a e^c(\cos(b+d) + i\sin(b+d)).$$

Donde utilizamos la definición de la exponencial compleja, y la propiedad de la exponencial real $e^{a+c} = e^a e^c$.

Calculemos ahora $e^z e^w$. Esto es:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \big(e^a(\cos(b) + i\sin(b))\big) \cdot \big(e^c(\cos(d) + i\sin(d))\big) \\ &= e^a e^c \left[\underbrace{\cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d)}_{\cos(b+d)} + i(\underbrace{\cos(b)\sin(d) + \cos(d)\sin(b)}_{\sin(b+d)})\right] \\ &= e^a e^c(\cos(b+d) + i\sin(b+d)), \end{aligned}$$

donde fueron utilizadas las fórmulas para el seno y coseno de la suma. □

Comentario

Un comentario importante: no se pretende que estas fórmulas (del coseno y seno de la suma) sean recordadas de memoria. Es más, esta propiedad de los complejos es útil para *deducir* estas fórmulas. Es decir, ahora sabemos que $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, y a partir de la definición, haciendo cuentas, llegamos a las fórmulas deseadas (es, en realidad, la demostración que recién hicimos, pero ahora la usamos "al revés": sabemos que el resultado es cierto, y lo aprovechamos para recordar las fórmulas que utilizamos para demostrarlo). ¡Hágalo!

Ejemplo 1.17
$e^{i\pi} = e^0(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1$.

Observemos que si z es un complejo puramente imaginario, $z = ib$, entonces $e^z = e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$. Esto es, un complejo de módulo uno (y ángulo b).

En general, si $z = a + bi$, entonces el módulo de e^z es

$$|e^a(\cos(b) + i\sin(b))| = \sqrt{(e^a\cos(b))^2 + (e^a\sin(b))^2} = e^a\sqrt{(\cos(b))^2 + (\sin(b))^2} = e^a.$$

El módulo de e^z depende solamente de la parte real de z. Por otro lado, el argumento depende solamente de la parte imaginaria.

Otra forma de ver esto era observando que $e^{a+bi} = e^a e^{ib}$, de donde

$$|e^{a+ib}| = |e^a| \cdot |e^{ib}| = e^a.$$

Volvamos a la exponencial de un imaginario puro: $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$, y recordemos la notación polar vista en (1.3). Entonces, si z es un complejo de módulo ρ y argumento θ, tenemos la notación más compacta:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

Es decir, con $e^{i\theta}$ tenemos un complejo de módulo uno y ángulo θ. Si luego lo multiplicamos por un escalar $\rho > 0$, obtenemos un complejo de módulo ρ y ángulo θ, pues lo único que estamos haciendo al multiplicar por un real positivo, es justamente cambiar la escala.

Ejercicio 1.18
¿Cuál es la imagen por la función exponencial del conjunto de números complejos con parte real nula? ¿Y del conjunto de complejos con parte imaginaria nula?

Ejemplos 1.19

1. $1 = e^{i0}$.
2. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
3. $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
4. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Ya vimos que la suma de complejos es muy natural, sobretodo si miramos su representación geométrica en el plano. Ahora, la interpretación para el producto de dos complejos no es evidente a partir de su definición. Sin embargo, si escribimos los números en su notación polar, $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, entonces el producto es:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

O sea, cuando hacemos el producto de dos complejos, los módulos se multiplican, y los ángulos se suman.

Además de dar una interpretación geométrica clara, esta notación es muy cómoda para trabajar con productos y potencias de complejos. Veremos ejemplos de esto a continuación, y en la sección 1.3. En general:

Importante

La notación binómica es más cómoda para trabajar con sumas, y la notación polar es más cómoda para trabajar con productos y potencias.

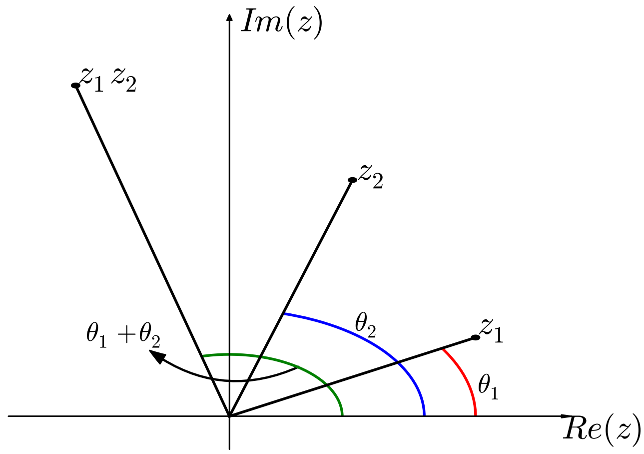

Figura 1.6: Producto de dos complejos. Se multiplican los módulos y se suman los ángulos.

Ejemplo 1.20
Busquemos todos los números $z \in \mathbb{C}$ que cumplan $z^2 = \bar{z}$.

Si escribimos z en su notación polar $z = \rho e^{i\theta}$, entonces buscamos que

$$\rho^2 e^{i2\theta} = \rho e^{-i\theta}.$$

Para que estos dos complejos sean iguales, deben serlo sus módulos y sus ángulos (a menos de múltiplos de 2π). Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} &\rho^2 = \rho, \\ &2\theta = -\theta + 2k\pi, \quad \textit{con } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos dos soluciones: $\rho = 0$ y $\rho = 1$.

De la segunda, tenemos que $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$, con $k \in \mathbb{Z}$. A priori podría parecer que tenemos infinitas soluciones (una para cada entero k). Sin embargo, rápidamente vemos que los ángulos se comienzan a repetir. Veamos qué sucede con algunos valores de k:

$$\begin{aligned} &\textit{Si } k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_0 = 0, \\ &\textit{Si } k = 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \\ &\textit{Si } k = 2 \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 = \frac{4\pi}{3}, \\ &\textit{Si } k = 3 \quad \Longrightarrow \quad \theta_3 = \frac{6\pi}{3} = 2\pi. \end{aligned}$$

Es decir, para $k = 3$ se repite el mismo ángulo que para $k = 0$, y si seguimos, para $k = 4$ se repetirá el mismo ángulo que para $k = 1$, y así. Tenemos por lo tanto cuatro soluciones:

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = 1,$$
$$z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_3 = e^{\frac{4\pi}{3}},$$

que se encuentran distribuidas según la siguiente figura:

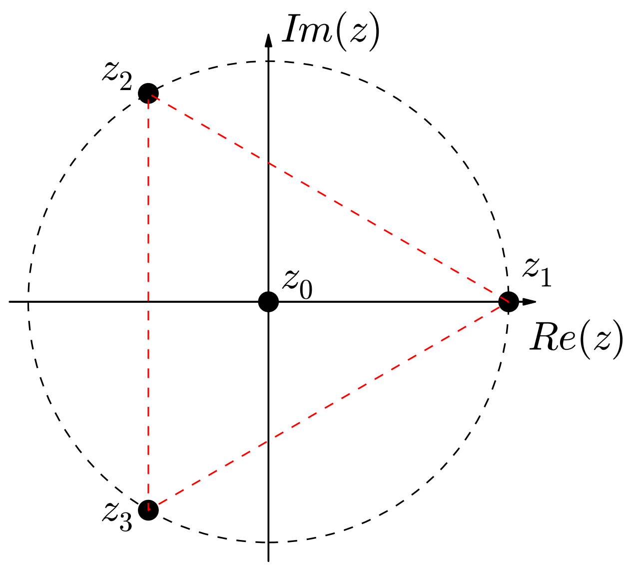

Figura 1.7: Las 4 soluciones de $z^2 = \bar{z}$.

¿Qué figura geométrica dibujan las soluciones distintas de cero? ¿Dónde se ve eso en las expresiones de las soluciones?

Ejercicio 1.21
Resuelva el mismo problema del ejemplo anterior, pero ahora utilizando la notación binómica, y verifique que las soluciones coinciden. ¿Qué pasaría con esta manera de proceder si en vez de z^2 tuviéramos z^5? ¿Y con la notación polar?

Observación 1.22
Observar que la función exponencial no es inyectiva (como sí lo es la exponencial en $\mathbb{R}$). Por ejemplo, tenemos que $e^{1+i\pi} = e^{1+i3\pi}$, y en general cualquier diferencia de múltiplos enteros de 2π en la parte imaginaria, dará el mismo resultado por la exponencial. Por lo tanto definir el logaritmo complejo como la función inversa de la exponencial no es viable. Se puede elegir un argumento entre $-\pi$ y π, y eso determina un logaritmo principal, pero no entraremos en eso en este curso.

1.3. Raíces complejas

Si bien hemos trabajado mucho con la unidad imaginaria, que verifica $i^2 = -1$, hemos tenido cuidado en no escribir $i = \sqrt{-1}$. Porque, veamos qué sucede si escribimos $i = \sqrt{-1}$ y operamos con las reglas que estamos acostumbrados:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Es claro que hay algo mal. A esta altura, hay una observación que vale la pena hacer: cuando escribimos $i^2 = -1$ o $\sqrt{-1}$, no nos referimos al -1 como número real, sino al -1 como número complejo, como par ordenado $(-1,0)$ (que es cierto, lo *identificamos* con el -1 real, pero lo construimos como par ordenado, con sus propias operaciones). Y aún no hemos definido la raíz como operación dentro de los complejos, por lo que no sabemos qué propiedades tiene. ¿Será cierto por ejemplo que $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$? Esta propiedad mantuvo a la comunidad matemática confundida por varios años[4].

Comencemos estudiando lo que se denominan las raíces enésimas de la unidad. Es decir, dado un natural n, buscamos números complejos z tales que $z^n = 1$. Entonces escribimos a z en su notación polar $z = \rho e^{i\theta}$, y tenemos que

$$\rho^n e^{in\theta} = 1.$$

De donde $\rho^n = 1$, y por lo tanto $\rho = 1$ (recordemos que ρ es un real no negativo, y por lo tanto $\rho = 1$ es la única solución). Luego, tenemos que $n\theta = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. De manera similar que en el ejemplo 1.20, de aquí obtenemos n soluciones, que son $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n}$. Observemos que para $k = 0$ obtenemos la solución $z_0 = 1$, que coincide con la raíz real conocida, y si n es par, para $k = \frac{n}{2}$ obtenemos $\theta_k = \pi$, es decir, $z_k = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$.

Para dos valores consecutivos de k, las soluciones correspondientes difieren en un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$, y todas tienen el mismo módulo. Es decir, tenemos n raíces enésimas de la unidad, y se encuentran en los vértices de un polígono regular de n lados.

Cuando queremos calcular las raíces enésimas de un complejo w_0 cualquiera, procedemos igual. Buscamos entonces los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = w_0$. Escribimos a w_0 en su notación polar $w_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, y también al z que buscamos, $z = \rho e^{i\theta}$. Entonces tenemos:

$$\rho^n e^{in\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}.$$

De donde obtenemos dos ecuaciones reales, una para el módulo, y otra para el argumento:

$$\begin{aligned} &\rho^n = \rho_0, \\ &n\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

[4] De hecho, Euler en su libro sobre *Algebra* (alrededor de 1770) escribía $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$ como un resultado posible.

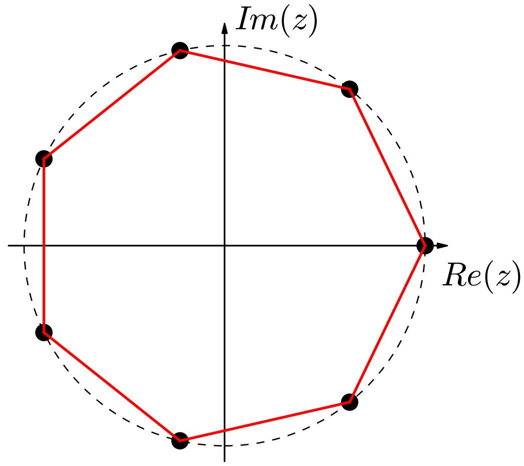

Figura 1.8: Complejos z que verifican $z^7 = 1$.

Recordando que ρ debe ser un real no negativo, y que las soluciones para θ son cíclicas en k, obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[n]{\rho_0}, \\ \theta &= \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Nuevamente tenemos n soluciones, todas de igual módulo, y formando un polígono regular. La diferencia con las raíces enésimas de la unidad son dos: el módulo no tiene por qué ser uno, naturalmente, y el "primer" ángulo (el correspondiente a $k = 0$) no es $\theta = 0$ sino el ángulo de w_0 dividido n.

Completemos esta sección[1] extendiendo la noción de logaritmo neperiano al dominio de los números complejos.

Es pertinente tener en cuenta que si consideramos la función exponencial compleja

$$e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

esta no es inyectiva. Se tiene por ejemplo $e^0 = e^{2\pi i} = 1$.

Esto nos lleva a pensar en que 0 y 2π son dos posibles logaritmos de 1 en el plano complejo y es así como lo entenderemos.

Dado un complejo z, definimos

$$log(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

Veamos un poco más de cerca esta definición. Dado un complejo $z = \rho e^{i\varphi}$ expresado en forma polar, calculemos $log(z)$. Es claro que un complejo $w = a + bi$ pertenece al conjunto $log(z)$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones

$$e^a = \rho \text{ y } e^{bi} = e\varphi i$$

lo que equivale a

- $a = L\rho$ (aquí L denota el logaritmo neperiano real) ,
- $b = \varphi + 2k\pi$ para cierto entero k.

Describir el lugar geométrico de los puntos que forman $log(z)$ para un z fijo.

[1] Complemento realizado por Mariana Haim para el curso Matemática 0 - 2020

Nota histórica

En el siglo XVI la comunicación y publicación de resultados, en particular en matemática, no se daba de igual manera que ahora. Eran comunes los desafíos, en los que matemáticos se proponían problemas y se retaban a ver quién era capaz de resolver más instancias, usualmente con un premio monetario, o con plazas en las universidades de por medio.

La historia completa sobre lo que hoy se conoce como la fórmula de *Cardano-Tartaglia* (o de *del Ferro-Tartaglia-Cardano*) para hallar soluciones a ecuaciones cúbicas, se conoce parcialmente.

La primera solución es debida a Scipione del Ferro (Bologna, 1465 - 1526), quien guardaba sus descubrimientos en un cuaderno que no compartía con nadie, para tener ventajas en caso de desafíos. Le comunicó esta solución a un estudiante suyo llamado Antonio Fiore, en su lecho de muerte según algunas historias.

Algunos años más tarde, Niccolo "Tartaglia" Fontana (apodado así debido a su tartamudez, causada por una cuchillada de un soldado francés durante la masacre de 1512 en Brescia) también se encontraba trabajando en las soluciones a ecuaciones cúbicas, y fue desafiado por Fiore. El reto consistió en 30 problemas que cada uno le proponía al contrincante, y fue Tartaglia quien ganó ese duelo, debido a que su fórmula funcionaba en más casos.

Entonces apareció Gerolamo Cardano, un matemático que ya contaba con cierta reputación. Tartaglia visita a Cardano en Milan en 1539, y le confía su fórmula, después de ser persuadido por Cardano. De hecho Tartaglia considera que fue presionado a entregarla a cambio de favores políticos (para conseguir una posición en una Universidad). La fórmula se la da en forma de poema, por si llegaba a caer en manos extrañas, y bajo el juramento de Cardano de no publicarla.

En 1543, Cardano y su estudiante Ludovico Ferrari viajan a Bologna a encontrarse con el yerno de Scipione del Ferro, Hannival Nave, quien había heredado su cuaderno de anotaciones, donde aparecía la solución a la ecuación cúbica.

Como la solución de del Ferro precedía a la de Tartaglia, Cardano decidió que no estaría violando su juramento hecho a Tartaglia de conservar en secreto su fórmula, y publicó la solución en su libro *Ars Magna* en 1545, pero reconociendo la autoría de Scipione del Ferro y de Tartaglia.

A Tartaglia de todas maneras no le gustó esto, comenzando así un extenso intercambio de insultos y desafíos con Ferrari, el estudiante de Cardano.