Ejercicios - Números complejos.

1. Notación binomial y generalidades

1. Determinar los valores de i^k para todo k entero.
2. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica ($a+bi$ con a,b reales)

   $a)$ $(1+i)^2$ $b)$ $\frac{1}{i}$ $c)$ $\frac{1}{1+i}$ $d)$ $(2+3i)(3-4i)$ $e)$ $(1+i)(1-2i)$ $f)$ i^5+i^{16}

   $g)$ -1 $h)$ $-3i$ $i)$ $1+i+i^2+i^3$ $j)$ $\frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$ $k)$ $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ $l)$ $\frac{1}{(1+i)^2}$

3. Probar que para todo par de números complejos z_1 y z_2

   $a)$ $|z_1|=|\bar{z}_1|$ $b)$ $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ $c)$ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ $d)$ si $z_1\neq 0$ $|\frac{1}{z_1}|=\frac{1}{|z_1|}$

4. Hallar y bosquejar, en cada caso, el lugar geométrico de los números complejos que satisfacen

   $a)$ $Re(z)=5$ $b)$ $Im(z)\leq -2$ $c)$ $z\overline{z}=25$ $d)$ $z-\overline{z}=i$ $e)$ $|z-i|=|z+i|$ $f)$ $|2z-\overline{z}|=1$

   $g)$ $|z-\overline{z}|=2Re(z-1)$

5. Recordar que el producto de dos números reales es cero si y sólo si alguno de estos números es cero. Investigar si esto sigue siendo cierto para números complejos.

2. Notación polar y exponencial

6. Expresar los números complejos del ejercicio 2 en notación exponencial ($re^{i\theta}$ con $r>0$ y θ real).
7. Expresar en notación binómica:

   $a)$ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ $b)$ $3e^{\pi i}$ $c)$ $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$ $d)$ $(i+1)^{100}$

8. Hallar y bosquejar, en cada caso, el lugar geométrico de los números complejos que satisfacen

   $a)$ $|z|>1$ $b)$ $2<|z|\leq 5$ $c)$ $\frac{\pi}{2}\leq Arg(z)\leq\frac{5\pi}{4}$

9. Probar la fórmula de De Moivre:

$$(cos(\theta)+isen(\theta))^n=cos(n\theta)+isen(n\theta)$$

10. Sea $A=\left\{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^n\ /\ n\in\mathbb{N}\right\}$. ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?

3. Raices complejas y logarítmo

11. *a*) Probar que la ecuación $z^n = 1$ tiene n soluciones complejas, a estos números se los llama raíces de la unidad.

    b) Deducir que para todo $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la ecuación $z^n = \omega$ tiene n soluciones complejas.

    c) Bosquejar en el plano las raices de la unidad para $n = 6$ y $n = 9$

12. Representar geométricamente los complejos:

    a) $(1+i)^n - (1-i)^n$ para algunos valores naturales n.

    b) Las raíces quintas de 1 (es decir, los complejos z tales que $z^5 = 1$)

    c) Las raíces décimas de 1

    d) Los complejos z tales que $z^6 = 8(\sqrt{3} - i)$

13. En $\mathbb{C}$, se consideran $\{z_1, \cdots, z_8\}$ las raíces octavas de 2^8, es decir aquellas que cumplen $z_k^8 = 2^8$ para cada $k = 1, \cdots, 8$. Determinar, justificando, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

    a) $z_i = 2$ para todo $i = 1, \cdots, 8$.

    b) Existen al menos dos raíces z_j, z_k tales que $z_j = -z_k$.

    c) Existen al menos dos raíces z_l, z_m tales que $\bar{z}_l = z_m$.

    d) Se cumple $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 = 2^8$.

14. Sea $P(z)$ un polinomio *con coeficientes reales*.

    a) Probar que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

    b) Probar que si $z_0 = a + ib$ es raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z_0} = a - ib$ también es raíz de $P(z)$.

15. Considere el polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$. Sabiendo que $P(z)$ tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.

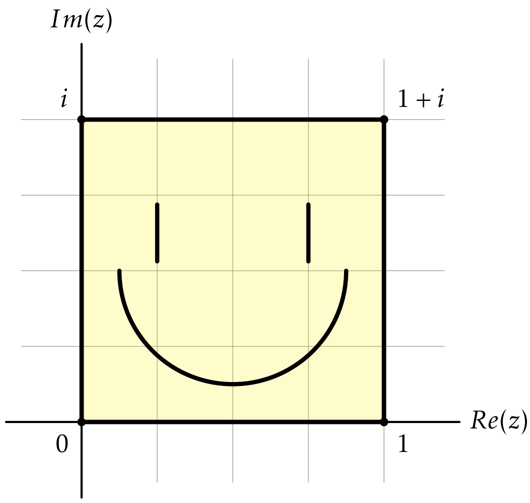
16. Calcular y dibujar $log(z)$ para los siguientes valores de z

    a) $z = i$ *b*) $z = e$ *c*) $z = -1$

17. Probar que $log(z)$ sólo contiene números imaginarios puros si y sólo si $|z| = 1$.

4. Complementarios

18. Bosquejar el resultado de aplicarle a la figura las siguientes funciones:



   a) $f(z) = z + (1+i)$.

   b) $f(z) = (1+i)z$.

19. Probar que la fórmula de Bhaskara es válida para polinomios de segundo grado con coeficientes complejos.

20. Se define el *seno* y *coseno complejos* mediante las fórmulas

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para $z \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   c) Probar que $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$ y $\cos(-z) = \cos z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

   d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.