Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Anillos y módulos
Primer semestre de 2025

Repartido 4: Dominios

1. Probar que el polinomio $X^4 + X^3 + X + 1$ no es irreducible sobre $\Bbbk[X]$, para ningún cuerpo $\Bbbk$.

2. Probar que si $\Bbbk$ es un cuerpo y $f \in \Bbbk[X]$ tiene grado 2 o 3, entonces f es irreducible si y solo si f no tiene ninguna raíz en $\Bbbk$. Mostrar con un ejemplo que la afirmación es falsa si $f \in \mathbb{Z}[X]$. Probar que $X^2 + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[X]$.

3. Sean D un dominio factorial, K su cuerpo de fracciones y $f = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in D[X]$. Sea $\frac{p}{q} \in K$ una raíz de f, con $p, q \in D$ coprimos. Probar que $q|a_n$ y $p|a_0$. Deducir que si $f \in D[X]$ es un polinomio mónico y $\alpha \in K$ es una raíz de p, entonces $\alpha \in D$.

4. Probar que en $\mathbb{Z}_5[X]$ vale
$$3X^3 + 4X^2 + 3 = (X + 2)^2(3X + 2) = (X + 2)(X + 4)(3X + 1).$$
Explicar por qué esta última igualdad no contradice el hecho de que $\mathbb{Z}_5[X]$ sea un dominio factorial.

5. Sea $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio primitivo. Probar que si existe un número primo p que no divide a a_n y que verifica que $\overline{a_n}X^n + \overline{a_{n-1}}X^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}X + \overline{a_0}$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[X]$, entonces f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$. Mostrar con un ejemplo que la afirmación es falsa si $p|a_n$. Aplicar este criterio para probar que
$$3X^3 - 5X^2 + 4X + 21 \quad \text{y} \quad 4X^3 + 3X^2 + 2X + 4$$
son irreducibles en $\mathbb{Q}[X]$.

6. En cada caso determinar si el polinomio f es irreducible en $D[X]$, para $D = \mathbb{Z}$ y para $D = \mathbb{Q}$.
$$f = 2X^5 - 6X^3 + 9X^2 - 15, \qquad f = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3, \qquad f = X^4 + X + 4,$$
$$f = 3X^4 + 6X^2 + 6, \qquad f = X^3 - 7X + 3, \qquad f = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1.$$

7. Sea p un número primo. Probar que el *polinomio ciclotómico* $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. *Sugerencia*: $f = \frac{X^p - 1}{X - 1}$, luego $f(X + 1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X}$ y aplicar el criterio de Eisenstein.

8. Sea $f = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.
   a) Probar que no existe ningún $a \in \mathbb{Z}$ tal que al polinomio $f(X + a)$ se le pueda aplicar el criterio de Eisenstein.
   b) Probar que f es irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

9. Aplicar el criterio de Eisenstein para probar irreducibilidad en los casos siguientes.
   a) $X^3 + 2X^2 + (4 - 2i)X + 1 + i \in D[X]$, siendo $D = \mathbb{Z}[i]$ los enteros de Gauss.
   b) $X^n - Y \in D[X, Y]$, siendo D un dominio factorial arbitrario, $n \geq 2$.

10. Investigar si los siguientes polinomios on irreducibles en $\mathbb{Z}[X, Y]$:
$$Y^4 + 2X^2Y^3 + X^3Y^2 - XY + X, \qquad Y^4 + XY^2 - 2X^2 + 3Y^2 + 2.$$

11. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Probar:
   a) $\langle X, Y\rangle$ es un ideal maximal de $\Bbbk[X, Y]$.
   b) $\langle Y\rangle$ es un ideal primo de $\Bbbk[X, Y]$ que no es maximal.