Ejercicio 1. (a) Suponga una membrana entera circular de radio $a = 0{,}25$ m, densidad superficial de masa $\rho = 1{,}0\ kg\ m^{-3}$ y sometida a una tensión de módulo $|\vec{T}| = 2{,}5 \times 10^4\ N\ m^{-1}$ que tiene el borde fijo. (a) Para esta membrana hallar los primero cuatro modos normales con menor frecuencia de vibración. (b) Para las frecuencias calculadas en la parte anterior, hallar las líneas nodales de cada modo de vibración. (c) Suponga que las condiciones iniciales de la membrana están dadas por:

$$z(r, \theta, 0) = (3 \times 10^{-3})\, J_0(k_{02} r)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Hallar la energía cinética media de la membrana.

SOLUCIÓN

(a) Los modos normales surgen de cumplir la condición de borde fijo en $r = a$. Para cumplir esta condición debemos tener:

$$J_m(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{j_{mn}}{a} \Rightarrow \omega_{mn} = \frac{c j_{mn}}{a}$$

Por lo tanto, los modos con menor frecuencia son aquellos con valores más bajos de j_{mn}. De la tabla adjunta podemos ver que los primeros 4 modos corresponden a: $j_{01}, j_{11}, j_{21}\ y\ j_{02}$. La velocidad de la onda en la membrana está dada por:

$$c = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}} \Rightarrow \omega_{mn} = \sqrt{\frac{|\vec{T}|}{\rho}} \frac{j_{mn}}{a}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores numéricos correspondientes obtenemos:

$$\omega_{01} \cong 1{,}52 \times 10^3\ rad/s$$

$$\omega_{11} \cong 2{,}42 \times 10^3\ rad/s$$

$$\omega_{21} \cong 3{,}25 \times 10^3\ rad/s$$

$$\omega_{02} \cong 3{,}49 \times 10^3\ rad/s$$

(b) El modo 0,1 se expresa como:

$$z_{01}(r, t) = J_0(k_{01} r) \cos(\gamma_0)\, [A_{01} \cos(\omega_{01} t) + B_{01} \sin(\omega_{01} t)]$$

Por lo tanto, las líneas nodales no dependen del ángulo polar θ y solo pueden depender de r. Como en este caso el primer cero de la función de Bessel se da en el borde ($r = a$), no hay líneas nodales en el interior de la membrana.

El modo 1,1 se expresa como:

$$z_{11}(r, \theta, t) = J_1(k_{11} r) \cos(\theta + \gamma_1)\, [A_{11} \cos(\omega_{11} t) + B_{11} \sin(\omega_{11} t)]$$

Nuevamente el primer cero de la función de Bessel se da en el borde y por lo tanto no hay línea nodal al interior de la membrana asociada a la coordenada radial. Sin embargo, en este caso hay dependencia con el ángulo polar. De manera que existe una línea nodal asociada a la recta $\theta + \gamma_1 = \pi/2$. De manera que tenemos una línea nodal en

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma_1$$

El modo 2,1 se expresa como:

$$z_{21}(r,\theta,t) = J_2(k_{21}r)\cos(2\theta + \gamma_2)\,[A_{21}\cos(\omega_{21}t) + B_{11}\sin(\omega_{21}t)]$$

Nuevamente el primer cero de la función de Bessel se da en el borde y por lo tanto no hay línea nodal al interior de la membrana asociada a la coordenada radial. Para la coordenada polar tenemos dos líneas nodales perpendiculares entre sí en los ángulos:

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \gamma_2$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \gamma_2$$

Finalmente, el modo 0,2 se expresa como:

$$z_{02}(r,t) = J_0(k_{02}r)\cos(\gamma_0)\,[A_{02}\cos(\omega_{02}t) + B_{02}\sin(\omega_{02}t)]$$

Nuevamente aquí no hay líneas nodales asociadas a la coordenada angular, pero en la coordenada radial tenemos un círculo nodal cuando:

$$\frac{j_{02}r}{a} = j_{01} \Rightarrow r = \frac{j_{01}a}{j_{02}} \cong 0{,}435a$$

(c) La solución general de oscilaciones libres en la membrana está dada por:

$$z(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}r)\cos(m\theta + \gamma_m)\,[A_{mn}\cos(\omega_{mn}t) + B_{mn}\sin(\omega_{mn}t)]$$

La segunda condición inicial dada implica $B_{mn} = 0$ y por lo tanto:

$$z(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}J_m(k_{mn}r)\cos(m\theta + \gamma_m)\cos(\omega_{mn}t)$$

La primera condición inicial implica:

$$z(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}J_m(k_{mn}r)\cos(m\theta + \gamma_m) = 3J_0(k_{02}r)$$

Usando la ortogonalidad de las funciones de Bessel llegamos a:

$$A_{mn} = (3 \times 10^{-3})\delta_{m0}\delta_{n2}\,;\gamma_0 = 0$$

De manera que para esta condición inicial la solución es:

$$z(r,t) = (3\times 10^{-3})\, J_0(k_{02}r)\cos(\omega_{02}t)$$

Es decir, solo se excita al modo 0,2. La densidad superficial de energía cinética en la membrana e_c está dada por:

$$e_c = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{9\times 10^{-6}}{2}\rho\omega_{02}^2\big(J_0(k_{02}r)\big)^2\sin^2(\omega_{02}t)$$

De manera que la energía cinética total en la membrana es la integral de esta cantidad sobre la superficie de la membrana:

$$E_c = \int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{9\times 10^{-6}}{2}\rho\omega_{02}^2\big(J_0(k_{02}r)\big)^2\sin^2(\omega_{02}t)\,d\theta r dr$$

$$= 2\pi\frac{9\times 10^{-6}}{2}\,\omega_{02}^2\sin^2(\omega_{02}t)\int_0^a rJ_0(k_{02}r)J_0(k_{02}r)dr$$

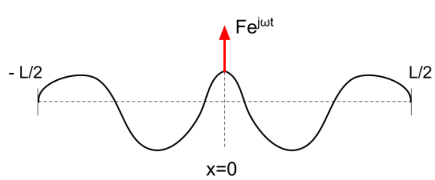
Para calcular la integral en r usamos la ortogonalidad de las funciones de Bessel y obtenemos:

$$E_c = 2\pi a^2\frac{9\times 10^{-6}}{2}\,\omega_{02}^2\sin^2(\omega_{02}t)\frac{1}{2}\,\big(J_0'(j_{02})\big)^2$$

Finalmente, el valor medio de la energía cinética se obtiene integrando este resultado en un período de tiempo y dividiendo entre el valor del período:

$$\langle E_c\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_c(t)dt = \frac{9\times 10^{-6}}{4}\,\pi a^2\,\omega_{02}^2\,\big(J_0'(j_{02})\big)^2$$

Sustituyendo los valores numéricos encontramos $\langle E\rangle \cong 0{,}50$ J.



Ejercicio 2. Considere la situación que se muestra en la figura donde una cuerda de largo L es excitada en su punto medio ($x=0$) con un forzante de la forma $Fe^{i\omega t}$. Sean $y_1(x,t)$ la solución para $-L/2 \le x \le 0$ e $y_2(x,t)$ la solución para $0 \le x \le L/2$. (a) Escribir las soluciones generales para $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ y las condiciones de borde que deben cumplir. (b) Probar que:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \frac{Fe^{i\omega t}}{2k|\vec{T}|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}\left[\sin\left(k\left(\frac{L}{2}+x\right)\right) + \sin\left(k\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)\right]$$

(c) Mostrar que la impedancia mecánica en $x=0$ está dada por:

$$Z_0 = -i\rho c\ cotan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

SOLUCIÓN

(a) Ambas soluciones consisten en ondas que se propagan en sentido positivo y negativo de x, por lo tanto:

$$y_1(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

$$y_2(x,t) = Ce^{i(\omega t - kx)} + De^{i(\omega t + kx)}$$

Las condiciones de borde son 4:

1 y 2: La cuerda está fija en los extremos $x = \pm L/2$

$$y_1\left(-\frac{L}{2}, t\right) = 0\,;\, y_2\left(\frac{L}{2}, t\right) = 0$$

3: La cuerda tiene continuidad de movimiento en $x = 0$:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t)$$

4: La suma de fuerzas sobre el punto $x = 0$ es nula:

$$-|\vec{T}|\frac{\partial y_1}{\partial x} + |\vec{T}|\frac{\partial y_2}{\partial x} + Fe^{i\omega t} = 0$$

(b) Aplicando la primera condición de borde tenemos:

$$Ae^{ikL/2} + Be^{-ikL/2} = 0 \Rightarrow B = -Ae^{ikL}$$

De la segunda condición tenemos:

$$Ce^{-ikL/2} + De^{ikL/2} = 0 \Rightarrow D = -Ce^{-ikL}$$

De la tercera condición tenemos:

$$A + B = C + D \Rightarrow A\left[1 - e^{ikL}\right] = C\left[1 - e^{-ikL}\right]$$

$$\Rightarrow Ae^{\frac{ikL}{2}}\left[e^{-\frac{ikL}{2}} - e^{\frac{ikL}{2}}\right] = Ce^{-\frac{ikL}{2}}\left[e^{\frac{ikL}{2}} - e^{-\frac{ikL}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow -2iAe^{\frac{ikL}{2}}\sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 2iCe^{-\frac{ikL}{2}}\sin\left(\frac{kL}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = -Ae^{ikL}$$

Tenemos por lo tanto:

$$y_1(x,t) = A\left[e^{-ikx} - e^{ikL}e^{ikx}\right]e^{i\omega t} = Ae^{\frac{ikL}{2}}\left[e^{-ik\left(\frac{L}{2}+x\right)} - e^{ik\left(\frac{L}{2}+x\right)}\right]e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow y_1(x,t) = -2iAe^{\frac{ikL}{2}}\sin\left(k\left(\frac{L}{2}+x\right)\right)e^{i\omega t}$$

$$y_2(x,t) = \left[-Ae^{ikL}e^{-ikx} + Ae^{ikx}\right]e^{i\omega t} = Ae^{\frac{ikL}{2}}\left[e^{-ik\left(\frac{L}{2}-x\right)} - e^{ik\left(\frac{L}{2}-x\right)}\right] = -2iAe^{\frac{ikL}{2}}\sin\left(k\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)$$

Imponiendo ahora la cuarta condición de borde tenemos:

$$2ik|\vec{T}|Ae^{\frac{ikL}{2}}\left[\cos\left(\frac{kL}{2}\right)+\cos\left(\frac{kL}{2}\right)\right]=-F$$

$$\Rightarrow A=-\frac{Fe^{-\frac{ikL}{2}}}{4ik|\vec{T}|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow y(x,t)=y_1(x,t)+y_2(x,t)=-\frac{F\ e^{i\omega t}}{4ik|\vec{T}|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}[e^{-ik\left(\frac{L}{2}+x\right)}-e^{ik\left(\frac{L}{2}+x\right)}+e^{-ik\left(\frac{L}{2}-x\right)}-e^{ik\left(\frac{L}{2}-x\right)}]$$

$$=\frac{Fe^{i\omega t}}{2k|\vec{T}|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}\left[\sin\left(k\left(\frac{L}{2}+x\right)\right)+\sin\left(k\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)\right]$$

(c) A partir de la expresión anterior tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=i\omega\frac{Fe^{i\omega t}}{2k|\vec{T}|\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}\left[\sin\left(k\left(\frac{L}{2}+x\right)\right)+\sin\left(k\left(\frac{L}{2}-x\right)\right)\right]$$

Evaluando esta expresión en $x=0$ tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x=0)=\frac{icFe^{i\omega t}}{\rho c^2}\frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{\cos\left(\frac{kL}{2}\right)}$$

De manera que la impedancia mecánica en ese punto queda:

$$Z_0=\frac{Fe^{i\omega t}}{\frac{\partial y}{\partial t}}=-i\rho c\ cotan\left(\frac{kL}{2}\right)$$