Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Anillos y módulos
Primer semestre de 2025

Repartido 5: Módulos, generalidades

1. Sean A un anillo y $(M, +, 0)$ un grupo abeliano. Notamos $End(M)$ al anillo de todos los morfismos de grupos de M en M (con la suma punto a punto y la composición).

   a) Probar que hay una correspondencia biyectiva entre:
      - las funciones $\cdot : A \otimes M \to M$ que hacen de M un A-módulo a izquierda,
      - los morfismos de anillos $A \to End(M)$.

   b) Explicitar qué morfismo de anillos corresponde a la acción regular de A en sí mismo.

2. Sean $\Bbbk$ un cuerpo, V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $T \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(V)$. Se considera V como $\Bbbk[X]$-módulo definiendo para $p \in \Bbbk[X]$ y $v \in V$, $p \cdot v = [p(T)](v)$.

   a) Probar que si V tiene dimensión finita, entonces V es un $\Bbbk[X]$-módulo finitamente generado.

   b) Probar que los $\Bbbk[X]$-submódulos de V son los subespacios T-invariantes de V.

   c) Si W es otro $\Bbbk$-espacio vectorial y $S \in \operatorname{End}_{\Bbbk}(W)$, probar que V y W son isomorfos como $\Bbbk[X]$-módulos, con las estructuras definidas por T y S respectivamente, si y sólo si existe un isomorfismo de $\Bbbk$-espacios vectoriales $R : V \to W$ tal que $R^{-1} \circ S \circ R = T$.

   d) En el caso particular de $V = \mathbb{R}^2$ y $T : V \to V$ definida por $T(x, y) = (y, x)$, hallar todos los $\Bbbk[X]$-submódulos de V.

3. Un módulo M se dice *simple* si $M \neq 0$ y M no tiene submódulos propios.
   Un módulo M se dice *indescomponible* si $M \neq 0$ y M no se puede escribir como suma directa de submódulos propios. En caso contrario M se dice *descomponible*. Probar:

   a) Todo módulo simple es cíclico e indescomponible.

   b) El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ es indescomponible pero no es simple.

   c) Si D es un DIP, entonces D es indescomponible como D-módulo.

   d) Un módulo $M \neq 0$ es descomponible si y sólo si existe $\rho \in \operatorname{End}_A(M)$ tal que $\rho^2 = \rho$, $\rho \neq 0$, $\rho \neq \mathrm{id}$.

4. Sea A un anillo.

   a) Sea I un ideal izquierdo maximal de A, probar que A/I es un A-módulo simple.

   b) Probar que si $M = Am$ es simple, entonces existe I ideal izquierdo maximal de A tal que $M \simeq A/I$.

5. *Lema de Schur.*

   a) Sean M y N dos A-módulos simples y $\varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$. Probar que $\varphi = 0$ o φ es un isomorfismo.

   b) Si M es un módulo simple, probar que $\operatorname{End}_A(M)$ es un anillo con división.

6. Un módulo M se dice *semisimple* si $M = 0$ o M es suma directa de submódulos simples.

   a) Sea M un módulo y N, P submódulos de M tales que N es simple. Probar que $N \subset P$ o $N \cap P = 0$.

   b) Probar que si un módulo es suma de submódulos simples, entonces es semisimple.
   Sugerencia: si $M = \sum_{i \in I} M_i$, M_i simple, tomar $J \subset I$ maximal[1] entre los subconjuntos de I que verifican $\sum_{i \in J} M_i$ es directa. Probar $M_k \subset \sum_{i \in J} M_i$, para todo $k \in I$.

   c) Supongamos que M es semisimple y $N \subseteq M$ es un submódulo. Probaremos que N y M/N son semisimples y que N es un sumando directo de M. Sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, M_i simple.

      1) Sea $\pi : M \to M/N$ la proyección canónica y $\overline{M}_i = \pi(M_i)$. Probar que $M/N = \sum_{i \in I} \overline{M}_i$ y que $\overline{M}_i = 0$ o $\overline{M}_i \simeq M_i$. Deducir que M/N es semisimple.

      2) Sea $J \subset I$ tal que $M/N = \bigoplus_{i \in J} \overline{M}_i$. Consideremos $N' = \sum_{i \in J} M_i$. Probar $M = N \bigoplus N'$.

      3) Deducir que vale $N = \bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i$, luego N es semisimple.

7. Se considera $\mathbb{Z}_m$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

   a) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es simple si y sólo si $m = p$ primo.

   b) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es indescomponible si y sólo si $m = p^l$ con p primo, $l \geq 1$.

   c) Probar que $\mathbb{Z}_m$ es semisimple si y sólo si $m = p_1 \cdots p_r$, siendo $p_1, \ldots, p_r$ números primos distintos.

8. Dado $\Bbbk$ un anillo con división, se considera el anillo $A = M_n(\Bbbk)$. Sean $\{e_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ y $\{e_i : i = 1, \ldots, n\}$ las bases canónicas de A y de $\Bbbk^n$, respectivamente.

   a) Probar que $\Bbbk^n$ es un A-módulo simple (la acción es el producto de matriz por vector columna).

   b) Probar que para cada $j = 1, \ldots, n$, el conjunto $L_j = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \, e_{ij} : a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk\}$ es un ideal izquierdo de A isomorfo a $\Bbbk^n$ como A-módulo y que $A = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Deducir que A es semisimple como A-módulo.

   c) Probar que existen $R_1, \ldots, R_n$ ideales derechos simples (como A-módulos a la derecha) tales que $A = R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$.

9. Sean p, q números primos.

   a) Probar que existe una sucesión exacta corta

   $$E : 0 \to Z_p \to Z_{pq} \to Z_q \to 0$$

   (completar cuáles son los morfismos)

   b) Probar que E se escinde si y sólo si $p \neq q$.

10. *a*) Probar que si L es libre toda sucesión exacta corta que termina en L se escinde.

    b) Consdierar $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ como A-módulo con la acción $(\lambda, \mu).r = \lambda r$.

      1) Probar que efectivamente es un A-módulo.

      2) Probar que toda sucesión que termina en $\mathbb{R}$ se escince.

      3) Deducir que no vale el recíproco de la parte anterior.

[1]Asumir que existe un tal J, que se prueba aplicando el Lema de Zorn.