**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Anillos y módulos**
**Primer semestre de 2025**

**Repartido 6: Módulos libres y producto tensorial**

1. Este resultado vuelve a la parte de anillos y mejora un resultado visto en clase. Además, sirve para probar el ejercicio que sigue.
   *a*) Probar que si en un monoide todo elemento es invertible a izquierda, entonces todo elemento es invertible.
   *b*) Probar que son equivalentes:
      (i) $A$ es un anillo con división,
      (ii) $A$ no contiene ideales izquierdos propios,
      (iii) todo elemento no nulo de $A$ es invertible a izquierda,
      (iv) todo elemento de $A$ es invertible.
2. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   (i) $A$ es un anillo con división.
   (ii) todo $A$-módulo a izquierda es libre.

   Sugerencia para (ii) implica (i), tomar un ideal izquierdo maximal $I$ y observar que el módulo (libre) a izquierda $A/I$ no tiene submódulos propios, de lo que se deducirá que $A$ no tiene ideales izquierdos propios.
3. Probar el Lema 4.4.24 de las notas del curso.
4. Probar que si $M$ y $N$ son módulos libres, entonces $M \oplus N$ es un módulo libre.
5. Probar que si $M$ y $N$ son módulos libres y existen bases $B$ de $M$ y $C$ de $N$ tales que $\#B = \#C$, entonces $M$ y $N$ son isomorfos.
6. Sea $A$ un anillo conmutativo. Probar que $\operatorname{Hom}_A(A^n, A^m)$ es un $A$-módulo libre de rango $mn$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$.
7. Se considera $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.
   *a*) Probar que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado.
   *b*) Probar que $\mathbb{Q}$ no es libre.
8. Sea $A$ un anillo conmutativo que verifica que todo submódulo de un $A$-módulo libre, es libre. Probar:
   *a*) Todo ideal de $A$ es principal.
   *b*) En $A$ no hay divisores de cero.

   Deducir que $A$ es un DIP.
9. Se considera el anillo de polinomios $\mathbb{Q}[X]$. Sean

$$A = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] : \ a_0 \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad I = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X] : \ a_0 = 0 \right\}.$$

*a*) Probar que $A$ es un subanillo de $\mathbb{Q}[X]$ y que $I$ es un ideal de $A$.

*b*) Sean $p_1, \dots, p_t \in I$ arbitrarios no nulos. Luego cada $p_i$ se escribe de la forma

$$p_i = \frac{m_i}{n_i} X^{k_i} + (\text{términos de grado mayor que } k_i), \qquad \frac{m_i}{n_i} \neq 0,\ k_i \geq 1.$$

Probar que $\frac{1}{2\, n_1 \cdots n_t} X$ está en $I$ pero no en $\sum_{i=1}^{t} A \cdot p_i$.

*c*) Probar que $I$ no es finitamente generado como $A$-módulo.

10. Sea $A$ un anillo cualquiera y $R = \operatorname{End}_A A[X]$ el anillo de endomorfismos de $A[X]$. En lo que sigue consideraremos $R$ como $R$-módulo (luego la acción es la composición de morfismos).

Recordar que $A[X]$ es un $A$-módulo libre de base $\{1, X, X^2, \dots\}$.

*a*) Se definen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R$ mediante

$$\begin{cases} \varepsilon_1\big(X^{2n}\big) &= X^n \\ \varepsilon_1\big(X^{2n+1}\big) &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varepsilon_2\big(X^{2n}\big) &= 0, \\ \varepsilon_2\big(X^{2n+1}\big) &= X^n, \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Probar que si $\varphi \in R$, entonces $\varphi = \varphi_1 \varepsilon_1 + \varphi_2 \varepsilon_2$, siendo $\varphi_1, \varphi_2 \in R$ definidas por

$$\varphi_1(X^n) = \varphi\big(X^{2n}\big), \quad \varphi_2(X^n) = \varphi\big(X^{2n+1}\big), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) Probar que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ es una base de $R$ como $R$-módulo.

*b*) Probar que $R$ admite una base de cardinal $n$, para todo $n = 1, 2, 3, \dots$.

11. Dar ejemplos de módulos en los cuales:

*a*) Un LI tiene más elementos que un generador.

*b*) Un LI tiene la misma cantidad de elementos que una base, pero no es base.

*c*) Un generador tiene la misma cantidad de elementos que una base, pero no es base.

*d*) El módulo es finitamente generado y tiene un submódulo que no es finitamente generado.

*e*) Los módulos $M$ y $N$ son libres, pero $\operatorname{rango}(M \oplus N) \neq \operatorname{rango}(M) + \operatorname{rango}(N)$.

12. En este ejercicio los productos tensoriales son sobre $\mathbb{Z}$, $A$ es un grupo abeliano y $m, n > 0$. Probar:

*a*) $A \otimes \mathbb{Z}_m \cong A/mA$.

*b*) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$. siendo $d = mcd(m,n)$. Observar que esto implica $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$. si $mcd(m,n) = 1$.

*c*) $\mathbb{Q} \otimes Q \cong Q$.

*d*) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \neq 0$ pero $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$. Generalizar a un dominio cualquiera en lugar de $\mathbb{Z}$.

13. Sea $A = \mathbb{Z}[x]$ y sea $I$ el ideal de $A$ generado por 2 y $x$. Probar que $x \otimes x + 2 \otimes 2$ no es un tensor elemental en $I \otimes_A I$ (pero sí lo es en $A \otimes_A A$)).

14. Cambiar el anillo en un producto tensorial puede o no afectarlo. Probar:

*a*) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$.

*b*) Probar que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \ncong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$.