Parcial 2

1. (40 puntos)

Sea A un anillo y L un A -módulo.

- a) Probar que si L es libre toda sucesión exacta corta que termina en L se escinde.
- b) Un módulo P se dice proyectivo si toda sucesión exacta corta que termina en P se escinde.
 - 1) Probar que P es proyectivo si y solo si existen L libre y X submódulo de L tal que $L \cong P \oplus X$. (Sugerencia: recordar que todo módulo es cociente de un módulo libre).
 - 2) Sean $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $M = \mathbb{R}$ con la acción definida por $(\lambda, \mu) \cdot m = \lambda m$.
 - a' Probar que M no es libre.
 - b' Definir M' tal que $M \oplus M' \cong A$ y deducir que M es proyectivo.

2. (30 puntos)

Se considera $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}$ -módulo.

- a) Probar que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado.
- b) Probar que $\mathbb{Q}$ no es libre.

3. (30 puntos)

Supongamos que D es un dominio a ideales principales

- a) Para $d, d' \in D$, probar que $\frac{D}{(d)} \oplus \frac{D}{(d')}$ es cíclico si y solo si $\text{mcd}(d, d') = 1$.
- b) Sea M un D -módulo finitamente generado. Probar que si M es indescomponible entonces es cíclico (tiene un generador de cardinal 1) y que el recíproco no es cierto.