Ejercicio 1

(a) Considere una fuente de ondas plana pero de geometría arbitraria cuya superficie vibra en forma armónica con velocidad $U_0 e^{i\omega t}$ en todos sus puntos. Mostrar que en la aproximación de campo lejano el campo acústico de presión toma la forma:

$$P'(\vec{r},t) = P_s'(r,t)H(\theta,\varphi)$$

donde $P_s'(r,t)$ es el campo de una fuente simple que solamente depende de la distancia a la fuente y tiene simetría esférica y $H(\theta,\varphi)$ es el diagrama de directividad de la fuente, siendo θ,φ los ángulos de las coordenadas esféricas. (b) Si la fuente es un rectángulo de lados a y b, hallar $P_s'(r,t)$ y $H(\theta,\varphi)$. (c) En el caso en que la fuente sea cuadrada ($a = b$), mostrar que la condición para que exista al menos una línea nodal en la emisión está dada por:

$$\tan(\theta) \geq \frac{\lambda}{a}$$

donde λ es la longitud de onda de la emisión.

Solución

(a) Si dividimos la fuente arbitraria en infinitas fuentes simples, el campo acústico de cada una de ellas está dado por:

$$dP'(\vec{r},t) = \frac{i\omega\rho_0}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_s|} e^{i(\omega t - k|\vec{r}-\vec{r}_s|)} dQ_s$$

Donde $\vec{r}$ es el punto de observación y $\vec{r}_s$ es un punto sobre la superficie de la fuente, como se muestra en la figura. Como todos los puntos de la superficie vibran con la misma amplitud tenemos $dQ_s = U_0 dS$. La distancia $R = |\vec{r}-\vec{r}_s|$ está dada por:

$$R = [z^2 + (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2]^{1/2} = z\left[1 + \left(\frac{x-x_s}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-y_s}{z}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= z\left[1 + \frac{x^2 + x_s^2 - 2xx_s + y^2 + y_s^2 - 2yy_s}{z^2}\right]^{1/2}$$

En la aproximación de campo lejano podemos despreciar los términos cuadráticos en la fase y expresar a primer orden:

$$R \cong z\left[1 + \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)}{z^2} - \frac{xx_s}{z^2} - \frac{yy_s}{z^2}\right] = z + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z} - \frac{x}{z}x_s - \frac{y}{z}y_s$$

Mientras que para el término en amplitud nos quedamos el orden cero:

$$R \cong z + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{z} \cong r$$

Donde hemos definido $\rho^2 = x^2 + y^2$. De manera que en la aproximación de campo lejano tenemos para cada fuente simple:

$$dP'(\vec{r},t) \cong \frac{i\omega\rho_0 U_0}{4\pi r} e^{i(\omega t-kr)} y e^{\frac{ikx}{z}x_s} e^{\frac{iky}{z}y_s} dS$$

El campo total de la fuente se obtiene integrando sobre la superficie de esta:

$$P'(\vec{r},t) \cong \frac{i\omega\rho_0 U_0}{4\pi r} e^{i(\omega t-kr)} \int_S e^{\frac{ikx}{z}x_s} e^{\frac{iky}{z}y_s} dS$$

Podemos escribir:

$$\frac{x}{z} = \tan(\theta)\cos(\varphi)$$

$$\frac{y}{z} = \tan(\theta)\sin(\varphi)$$

De manera que:

$$\frac{i\omega\rho_0 U_0 S}{4\pi r} e^{i(\omega t-kr)} \left[\frac{1}{S}\int_S e^{ik\tan(\theta)(x_s\cos(\varphi)+y_s\sin(\varphi))} dS\right]$$

La expresión entre paréntesis rectos es una función de θ y φ que es proporcional a la transformada de Fourier de la geometría de la fuente y llamaremos $H(\theta,\varphi)$. El producto $U_0 S = Q$ es el poder total de la fuente, de manera que llegamos al resultado buscado:

$$P'(\vec{r},t) = P_s'(r,t) H(\theta,\varphi)$$

Donde:

$$P_s'(r,t) = \frac{i\omega\rho_0 Q}{4\pi r} e^{i(\omega t-kr)}$$

$$H(\theta,\varphi) = \frac{1}{S}\int_S e^{ik\tan(\theta)(x_s\cos(\varphi)+y_s\sin(\varphi))} dS$$

(b) Si la fuente es un rectángulo de lados a y b, tenemos de la parte anterior:

$$P_s'(r,t) = \frac{i\omega\rho_0 U_0 ab}{4\pi r} e^{i(\omega t-kr)}$$

$$H(\theta,\varphi) = \frac{1}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{ik\tan(\theta)\cos(\varphi)x_s} e^{ik\tan(\theta)\sin(\varphi)y_s} dx_s dy_s$$

$$= \frac{1}{ab}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{iktan(\theta)\cos(\varphi)x_s} dx_s\right] \frac{2i\sin\left(k\,tan(\theta)\,sin(\varphi)\frac{b}{2}\right)}{iktan(\theta)\sin(\varphi)}$$

$$= \frac{\sin\left(k\ tan(\theta)\ cos(\varphi)\ \frac{a}{2}\right)}{k\ tan(\theta)\cos(\varphi)\frac{a}{2}} \frac{\sin\left(k\ tan(\theta)\ sin(\varphi)\ \frac{b}{2}\right)}{k\ tan(\theta)\sin(\varphi)\frac{b}{2}}$$

$$= sinc\left(\frac{ka}{2}\tan(\theta)\cos(\varphi)\right) sinc\left(\frac{kb}{2}\tan(\theta)\sin(\varphi)\right)$$

(c) la función $sinc(x)$ se anula cuando el argumento vale $m\pi$ con $m = 1,2,3$ .... de manera que para tener una línea nodal en una fuente cuadrada se debe cumplir una de las siguientes condiciones:

$$\frac{ka}{2}\tan(\theta)\cos(\varphi) = m\pi$$

$$\frac{ka}{2}\tan(\theta)\sin(\varphi) = m\pi$$

La primera línea nodal se da en $m = 1$. De manera que para que exista alguna línea nodal para un ángulo θ dado, debemos tener alguna de las siguientes condiciones

$$\cos(\varphi) = \frac{2\pi}{ka}\frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\lambda}{a}\frac{1}{\tan(\theta)}$$

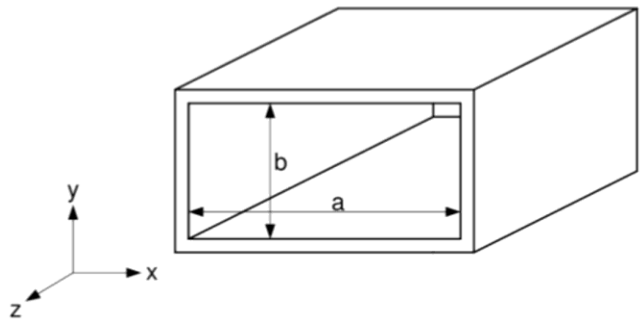
$$\sin(\varphi) = \frac{\lambda}{a}\frac{1}{\tan(\theta)}$$

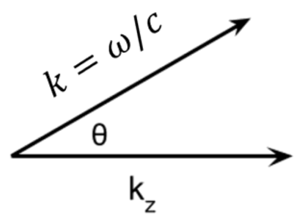
Tanto sin (φ) como $\cos(\varphi)$ deben ser menores o iguales a 1 de manera que se debe cumplir:

$$\tan(\theta) \cong \sin(\theta) \geq \frac{\lambda}{a}$$

Ejercicio 2.

Considere una guía de ondas rectangular de lados a y b con bordes rígidos, y una onda plana de frecuencia ω y velocidad c que incide sobre la entrada de la guía. En su interior la onda se propaga con un ángulo respecto a la dirección z como se muestra en la figura.





(a) A partir de las condiciones de borde y el método de separación de variables muestre que la componente de propagación de la onda en la dirección *z* es:

$$k_z = \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{mn}^2\right]^{1/2} \quad ; \quad k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

y explique brevemente qué sucede si $\omega/c < k_{mn}$. (b) Encuentre la velocidad de fase y la velocidad de grupo para la onda que se propaga en la guía, en función de la frecuencia de la onda incidente (ω) y la frecuencia de corte ($\omega_{mn} = ck_{mn}$). (c) Mostrar que la velocidad de grupo se puede escribir como $c_g = c\cos(\theta)$. Explique qué pasa con la propagación de la onda (velocidad de fase y de grupo) en los casos límites $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. ¿En estos casos, cómo es la relación entre la frecuencia incidente y la frecuencia de corte de cada modo?

Solución

(a) Como la onda contiene una única frecuencia tenemos la relación entre el número de ondas y la frecuencia:

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Aplicando separación de variables a la ecuación de ondas tenemos:

$$P' = X(x)Y(y)Z(z)e^{i\omega t}$$

$$\nabla^2 P' + k^2 P' = \left\{\left[YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right] + k^2 XYZ\right\}e^{i\omega t} = 0$$

Dividiendo esta expresión entre P' tenemos:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2$$

De manera que podemos escribir:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2$$

con $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \Rightarrow k_z = \left(k^2 - k_x^2 - k_y^2\right)^{1/2}$ .Cada función espacial cumple con la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple de manera que:

$$X(x) = A\sin(k_x x) + B\cos(k_x x)$$

Usando la condición de borde rígido tenemos que la velocidad particular cumple: $v_x = 0\ si\ x = 0\ ;\ x = a$. La velocidad particular se relaciona con la presión acústica mediante la ecuación de Euler:

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla P'$$

De manera que $v_x \propto dX/dx$:

$$\frac{dX}{dx} = k_x(A\cos(k_x x) - B\sin(k_x x))$$

Evaluando en $x = 0$ tenemos $k_x A = 0 \Rightarrow A = 0$. Evaluando en $x = a$ tenemos $B\sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x = m\pi/a\ m = 0,1,2,3, \ldots$ De manera análoga tenemos $k_y = n\pi/b\ \ n = 0,1,2,3, \ldots$ Por lo tanto la expresión para k_z está dada por:

$$k_z = \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{mn}^2\right]^{1/2};\ k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Si $\omega/c < k_{mn}$ entonces k_z es imaginario y tenemos una onda evanescente en la dirección z. La consecuencia es que no hay propagación para ese modo en particular.

(b)La velocidad de fase la encontramos como:

$$c_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{mn}^2\right]^{\frac{1}{2}}} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}$$

con $\omega_{mn} = ck_{mn}$. Para la velocidad de grupo tenemos que calcular:

$$c_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \left(\frac{\partial k_z}{\partial\omega}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial k_z}{\partial\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{mn}^2\right]^{-\frac{1}{2}} 2\,\frac{\omega}{c^2} = \frac{1}{c}\left[1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow c_g = c\left[1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

(c) Tenemos que:

$$\cos(\theta) = \frac{k_z}{k} = \left(\frac{\omega}{c}\right)\left[1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}\frac{1}{k} = \left[1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

de manera que:

$$c_g = c\cos(\theta)$$

Si $\theta = 0, \cos(\theta) = 1$ de manera que $c_f = c_g = c$. La onda se propaga únicamente en la dirección z. Esta condición se obtiene en el modo 0,0 o en el límite $\omega \gg \omega_{mn}$.

Si $\theta = \pi/2\ \ \cos(\theta) = 0 \Rightarrow k_z = 0$. La onda no se propaga dirección z y por lo tanto $c_g = 0$, $c_f \to \infty$. Esta condición se obtiene cuando $\omega = \omega_{mn}$.