Práctico 1
Ecuación de continuidad de la masa, equilibrio hidrostático, perfil de densidad y energía potencial gravitatoria.

1. Cálculos para el perfil de densidad $\rho(r)$ uniforme.

   (a) Demuestre que para una estrella de masa M y radio R en equilibrio hidrostático, el valor de la presión central P_c para el caso de una densidad uniforme $\rho = \rho_c$ cumple la inecuación:

   $$P_c > \frac{1}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

   (b) Suponga que la estrella alcanza su máxima densidad ρ_c en su centro, donde la presión vale P_c. Demuestre que P_c y ρ_c están relacionadas por[3]:

   $$P_c < (4\pi)^{1/3} 0{,}347 \; G M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

2. Cálculos para el perfil de densidad $\overline{\rho(r)} = 3m(r)/4\pi r^3$

   (a) ¿Cuál es la diferencia entre este perfil y el perfil uniforme?

   (b) Demuestre que en este caso la cota inferior de la presión central P_c viene dada por:

   $$P_c > \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

3. Cálculos para el perfil de densidad $\rho(r) \propto (1 - r/R)$
   A partir de la ecuación de continuidad y considerando que la densidad $\rho(r)$ viene dada por:

   $$\rho(r) = \rho_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

   donde ρ_c es la densidad en el centro de la estrella de radio R:

   (a) Demuestre que la masa contenida entre el centro y un radio interno r viene dada, en términos de la variable $x = r/R$, por:

   $$m(x) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c (x^3 - \frac{3}{4}x^4)$$

   (b) Demuestre que la masa total de la estrella M viene dada por:

   $$M = \frac{\pi}{3} R^3 \rho_c$$

   (c) Empleando la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que la presión P como función de la coordenada radial adimensional x puede ser expresada como:

   $$P = \frac{5}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} \left(1 - \frac{24}{5}x^2 + \frac{28}{5}x^3 - \frac{9}{5}x^4\right)$$

   (d) Cuál es y cómo se compara la presión central con la cota inferior para el caso del perfil de densidad $\overline{\rho(r)} = 3m/4\pi r^3$ dada por:

   $$P_c > \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

[3] Versión del ejercicio 2.2 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik

(e) Demuestre que en equilibrio hidrostático la función $f(r) = P(r) + Gm^2/8\pi r^4$ decrece con r hacia la superficie[4].

(f) Demuestre que:

$$P_c > \frac{1}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

(g) Demuestre que la presión central satisface la desigualdad:

$$P_c > \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G\, \overline{\rho}^{\ 4/3} M^{2/3}$$

(h) Si se asume además que la densidad $\rho(r)$ decrece con r, se puede derivar un límite inferior más estricto y, además, un límite superior significativo para la presión central. Demuestre que en tal caso:

$$P_c > \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G\, \overline{\rho}^{\ 4/3} M^{2/3}$$

$$P_c < \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} G \rho_c^{4/3} M^{2/3}$$

(i) Calcule la temperatura a una distancia $r = R/2$ del centro, en función de la temperatura central T_c. Asuma que el gas es ideal y su composición química es igual en toda la estrella. [5]

4. Cálculos para el perfil de densidad $\rho(r) \propto 1 - (r/R)^2$.

   Considere una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella desde un valor máximo ρ_c en su centro hasta anularse en la superficie según la siguiente función[6]:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

   (a) Encuentre una expresión para la función $m = m(r)$ y grafíquela para distintos valores de ρ_c

   (b) Derive una relación entre M y R

   (c) Demuestre que la densidad promedio viene dada por $0{,}4\rho_c$

   (d) ¿Cuánto vale, según este perfil de densidad, la densidad central del Sol?

   (e) Verifique que se cumple la inecuación:

$$P_c > \frac{1}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}$$

5. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático demuestre que en una estrella hipotética constituida por un gas incompresible y en reposo, la presión P cerca de la superficie aumenta linealmente con la profundidad respecto de la superficie.

6. Asuma que el Sol está constituido por un gas ideal que se encuentra en equilibrio hidrostático y que su densidad central ρ_c se relaciona con su densidad promedio $\overline{\rho}$ según $\rho_c = \overline{\rho}/0{,}4$. Estime una cota mínima para su temperatura central T_c.

7. Encuentre una expresión para la energía potencial gravitatoria U_g de una distribución esférica de masa M y radio R con un perfil de densidad de masa $\rho(r)$. A partir de esa expresión demuestre que en el caso de un perfil uniforme $\rho(r) = \overline{\rho}$ la energía potencial gravitatoria U_g viene dada por:

$$E_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

[4] Versión del ejercicio 2 del práctico 4 de Julio Fernández
[5] Versión del ejercicio 4 del práctico 5 de Julio Fernández
[6] Versión del ejercicio 1.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik

8. Para una estrella de masa M y radio R encuentre el valor del coeficiente α de la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_g = -\alpha GM^2/R$ para un perfil de densidad dado por[7]:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

[7] Versión del ejercicio 2.3 de An Introduction to the Stellar Structure and Evolution de Dina Prialnik