Práctico 8
Modelos simples de estructura estelar: Modelos politrópicos

1. Vimos en clase que una estrella en equilibrio hidrostático y cuyo interior se rige por una ecuación de estado politrópica de constante K e ínice n posee un perfil de densidad $\rho(r)$ dado por la ecuación:

$$\frac{K(n+1)}{n4\pi G}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}}\frac{d\rho}{dr}\right) = -\rho$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución será la función $\rho = \rho(r)$ y requiere las siguientes dos condiciones de contorno: $\rho(R) = 0$ y $\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$. Argumente e interprete ambas condiciones.

2. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático y de la ecuación de continuidad demuestre la ecuación de Lane-Emden:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

donde $\xi = r/\alpha$, $\theta^n = \rho/\rho_c$ con n el índice politrópico, $\rho_c = \rho(r=0)$, $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$, G la constante de gravitación universal y K la constante de la ecuación de estado politrópica.

3. Calcule la solución de la ecuación de Lan-Emden para el caso $n = 0$. ¿Cuál es el significado físico de esta solución? ¿Puede existir una estrella politrópica con $n = 0$? ¿Por qué?

4. Resuelva la ecuación de Lane-Emden para el caso $n = 1$. Calcule la masa M de la estrella y el correspondiente valor de la variable ξ_1. [17]

5. Demuestre que en un polítropo de indice n la densidad central ρ_c y la presión central P_c se relacionan mediante la siguiente ecuación:

$$P_c = \frac{(4\pi G)^{1/n}}{n+1}\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{R}{R_n}\right)^{\frac{3-n}{n}}\rho_c^{1+\frac{1}{n}}$$

6. Demuestre que la masa de una estrella politrópica viene dada por:

$$M = -\,4\pi\rho_c\alpha^3\xi_1^2\frac{d\theta}{d\xi}\bigg|_{\xi_1}$$

donde $\xi = r/\alpha$, $\theta^n = \rho/\rho_c$ con n el índice politrópico, $\rho_c = \rho(r=0)$ y $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{-(n-1)/n}$

7. Demuestre que la masa M y el radio R de una estrella modelada como un polítropo de índice n se relacionan mediante:

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1}\left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G}$$

[17](Versión del ejercicio 5.2 de Prialnik)

8. Para una dada masa M y presión central P_c qué indice politrópico describe a una estrella de mayor tamaño ¿$n = 1{,}5$ o $n = 3$? *(Versión del ejercicio 5.3 de Prialnik)*

9. Demuestre que la energía gravitacional de una estrella de radio R y masa M en equilibrio hidrostático y modelada como un polítropo de índice n se puede escribir como:

$$E_g = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}$$

10. Demuestre que en el caso de una estrella politrópica existe una relación entre la densidad promedio $\overline{\rho}$ y la densidad central ρ_c dada por:

$$D_n \equiv \frac{\rho_c}{\overline{\rho}} = -\left[\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)_{\xi_1}\right]^{-1}$$

¿A qué valor de n corresponde $D_n = 0{,}4$? ¿Qué nos dice esto del perfil de densidad proporcional a r^2 que ya hemos estudiado?