

Práctico 11

El equilibrio de las estructuras estelares: Inestabilidades dinámicas

1. Demuestre que en una estrella en equilibrio hidrostático ($dP/dm = -Gm/(4\pi r^4)$) la presión escala con la densidad de la forma: $P \propto \rho^{4/3}$.
2. Explique por qué cuando $\gamma_{ad} < 4/3$ una estrella se vuelve dinámicamente inestable. ¿Qué tipo de estrellas conoce que se comporten de esta manera?
3. A partir de las siguientes expresiones para la energía interna por unidad de masa u en función de la presión P , la densidad ρ y la constante de proporcionalidad ϕ :

$$du + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$u = \phi \frac{P}{\rho}$$

derive una expresión para el exponente adiabático γ_a como función del parámetro β para el caso de un gas ideal y radiación. Calcule los valores de γ_a para $\beta = 0, \frac{1}{2}, 1$.²⁵

4. Demuestre que una estrella cuya presión es dominada por la presión del gas ideal es dinámicamente estable frente a pequeñas compresiones o expansiones adiabáticas en las que el número de partículas permanece constante.
5. La ecuación de estado para cuerpos sólidos autogravitantes, como los planetas, debe permitir una densidad finita en la superficie, donde la presión se anula. Despreciando los efectos de la temperatura, que generalmente son pequeños, tales ecuaciones de estado generalmente se expresan en la forma:

$$P(\rho) = K \left[\left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\gamma_1} - \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\gamma_2} \right]$$

donde K es una constante, ρ_s es la densidad en la superficie y $\gamma_1 > \gamma_2$.²⁶

- (a) Convierta la ecuación empleando las variables adimensionales $y = P/P_c$ y $x = \rho/\rho_c$, donde P_c y ρ_c son, respectivamente, la presión y densidad centrales.
- (b) Muestre que la estabilidad dinámica requiere que $\gamma_1, \gamma_2 > 4/3$ o que $\gamma_1, \gamma_2 < 4/3$
- (c) Muestre que el segundo caso impone un límite a la razón entre la densidad central y la densidad en la superficie ρ_c/ρ_s .

²⁵Versión del ejercicio 6.2 de Prialnik

²⁶Ejercicio 6.1 de Prialnik Segunda Edición