Mecánica Clásica 2020

Práctico 5 - Sistemas de partículas y sistemas rígidos

Ejercicio 1

Halle el centro de masa de las siguientes figuras homogéneas (con densidad de masa uniforme):

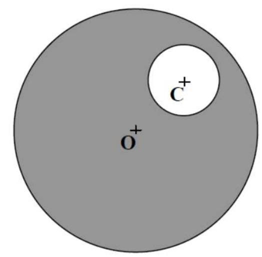
a) Sector de círculo de ángulo al centro 2α.

b) Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α.

c) Triángulo isósceles de base $2r$ y altura h.

d) Cono de revolución de radio r y altura h.

Ejercicio 2



Halle el centro de masa de un disco de radio a que tiene un agujero circular de radio b. Este agujero está centrado en un punto C que dista d del centro O del disco. Supondremos se verifica que $0 < d < a-b$.

Ejercicio 3

a) Demuestre que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal, aplicada en un punto Q, es equivalente a una primera cardinal y una segunda cardinal aplicada en otro punto R cualquiera. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{G} = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{Q} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_{Q}^{(ext)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{G} = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{R} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{R} + \vec{\mathbf{M}}_{R}^{(ext)} \end{array}\right.$$

b) Demuestre análogamente que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto Q, es equivalente al conjunto de tres ecuaciones obtenido de aplicar la segunda cardinal en tres puntos no alineados cualesquiera, por ejemplo, Q, R y S (Sugerencia: usar fórmulas de cambio de momentos):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{P}}} = M\,\vec{\mathbf{a}}_{G} = \vec{\mathbf{R}}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{Q} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_{Q}^{(ext)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{Q} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{Q} + \vec{\mathbf{M}}_{Q}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{R} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{R} + \vec{\mathbf{M}}_{R}^{(ext)} \\ \dot{\vec{\mathbf{L}}}_{S} = \vec{\mathbf{P}}\times\dot{S} + \vec{\mathbf{M}}_{S}^{(ext)} \end{array}\right.$$

Ejercicio 4.

Si el torque de las fuerzas externas para un sistema de partículas respecto a un punto de referencia Q_1 se define como:

$$\vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \sum_i (P_i - Q_1) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

a) Mostrar que respecto a otro punto de referencia Q_2 el torque se puede expresar como:

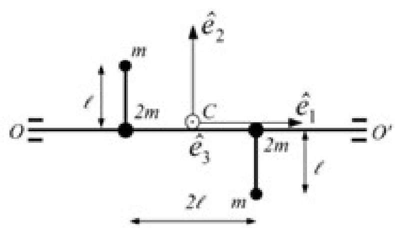
$$\vec{M}_{Q_1}^{(ext)} = \vec{M}_{Q_2}^{(ext)} + \vec{R}^{(ext)} \times (Q_1 - Q_2)$$

b) Análogamente, obtenga que para el momento angular se tendrá:

$$\vec{L}_{Q_1} = \vec{L}_{Q_2} + \vec{p} \times (Q_1 - Q_2)$$

Ejercicio 5

El rígido de la figura de abajo está formado por dos masas *2m*, separadas una distancia *2l* y montadas simétricamente con respecto al punto medio *C* del eje *OO'*, sujetas a dos masas *m* por medio de barras de largo *l* perpendiculares al eje *OO'*. El conjunto de las cuatro masas está en un mismo plano. Tanto las barras que une las masas como el eje OO' son de masa despreciable.



a) Calcule las componentes del tensor de inercia respecto a *C*.

b) Pasando a ejes principales, diagonalice el tensor de inercia obtenido en a).

Ejercicio 6

Halle el tensor de inercia en el centro de masa *G* de los siguientes sistemas rígidos homogéneos:

a) Disco de radio *R*.

b) Placa rectangular de lados *a* y *b*.

c) Esfera de radio *R*.

d) Superficie esférica de radio *R*.

Ejercicio 7

Para un semicírculo homogéneo de masa *M* y radio *R*, calcular el centro de masa y el tensor de inercia, respecto al centro del círculo.