Ejemplo: ejercicio 2.2.1

2.2.1- Queremos estudiar las propiedades de conducción de células nerviosas. Comenzaremos modelando un axón como un material cilíndrico con la resistividad del axoplasma, ρ_a = 2,0 Ω.m, envuelto por un aislante perfecto.

a) Si el radio de un axoplasma es de 5,0 μm, ¿Cuál es la resistencia de un axón de 2,5 cm de largo? ¿Es una resistencia alta o baja en relación a la de un material conductor típico?

b) Si el radio del axón fuera mayor, la resistencia sería mayor, menor o igual? Justifique.

c) ¿cuánto debería medir un cable de cobre del mismo radio para que tenga la misma resistencia?

ρ_a = 2,0 Ω.m C_m= 5,0×10^{-5} F/m^2 r = 5,0 μm L = 2,5 cm

$$R = \frac{\rho_a L}{\pi r^2} = \frac{(2{,}0)(0{,}025)}{\pi(5{,}0 \times 10^{-6})^2} = 6{,}366 \times 10^8\ \Omega$$

R = 6,4×10^8 Ω

Una resistencia muy alta comparada con los conductores ordinarios.
La resistencia disminuye al aumentar el radio.
La resistividad del cobre vale: ρCu =1,72×10^{-8} Ω.m
Si la sección es la misma, y las resistencias son iguales: $\rho_a L_a = \rho_{Cu} L_{Cu}$

$$L_{Cu} = \frac{\rho_a}{\rho_{Cu}} L_a = \frac{2{,}0}{1{,}72 \times 10^{-8}} 0{,}025 = 2{,}907 \times 10^6\ m$$

Más de 2.900 km!!!!

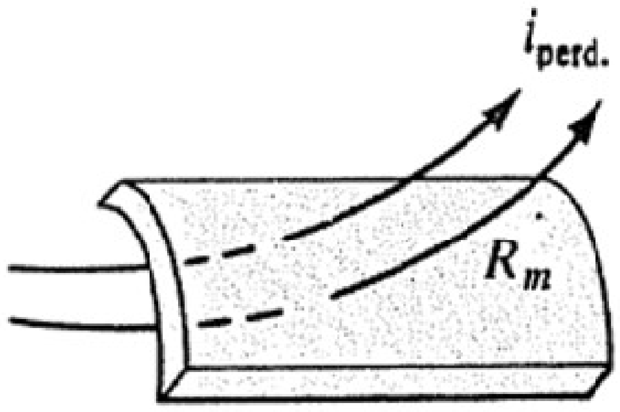
Ejemplo: ejercicio 2.2.2

2.2.2- En realidad un axón no está envuelto por un aislante perfecto sino por una membrana que tiene cierta resistividad, y parte de las señales (pulsos de corriente) que se transmitan por el axón se perderá a través de ella. Para estudiar la resistencia de pérdidas a través de la membrana, consideramos un material con área de sección igual al área cilíndrica interior del axón, y su largo será el espesor de la membrana.

a) Explicar por qué tiene sentido hacer esas consideraciones para el largo y el área de sección para estudiar la resistencia de pérdida.

b) Si en un axón sin mielina la resistencia de 1,0 m^2 de membrana es R_m = 0,20 Ω.m^2, ¿Cuánto vale la resistencia de pérdida, R_0, del axón del ejercicio anterior (5,0 μm de radio y 2,5 cm de largo)?

c) En el caso de un axón con mielina la resistencia de 1,0 m^2 de membrana crece a R_m = 40 Ω.m^2. ¿Por qué será?



a) Las pérdidas se pueden pensar como corriente que fluye al exterior del axón en forma radial al cilindro del modelo.

b) La resistencia de pérdida de la membrana la encontramos como:

$$R' = \frac{R_m}{\acute{A}rea\ lateral} = \frac{R_m}{2\pi r l} = \frac{0{,}20\ \Omega.m^2}{2\pi(5{,}0\times10^{-6}\ m)(0{,}025\ m)} =$$

R'= 2,5×10^5 Ω

c) Crece el espesor de la membrana en un factor aproximado a 100, diferencia de la resistividades

Ejemplo: ejercicio 2.2.3

2.2.3- A ambos lados de la membrana del axón se acumulan cargas de signos opuestos, por lo que la membrana posee capacidad eléctrica. Considere un axón de 2,5 cm de longitud y 5,0 μm de radio. El espesor de la membrana es de 10 nm, y su constante dieléctrica es κ = 7,0.
a) Calcule la capacitancia de la membrana del axón modelando la configuración como un capacitor cilíndrico.
b) Calcule la capacitancia de la membrana del axón modelando la configuración como un capacitor plano de placas paralelas.
c) Compare y discuta los resultados anteriores.

κ = 7,0; r = 5,0 μm; d = 10 nm; L = 2,5 cm

a) Modelo de capacitor cilíndrico.
La capacitancia está dada por la expresión:

$$C = 2\pi\kappa\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}$$

$$C = 2\pi\kappa\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} = 2\pi\kappa\varepsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{r+d}{r}\right)} = 2\pi(7{,}0)(8{,}85\times10^{-12})\frac{0{,}025}{\ln\left(\frac{5{,}0+0{,}010}{5{,}0}\right)} = 4{,}870\times10^{-9}\ F$$

C = 4,9×10^{-9} F

b) Modelo de capacitor plano:

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \kappa\varepsilon_0 \frac{2\pi r L}{d} = (7{,}0)(8{,}85\times10^{-12})\frac{2\pi(5{,}0\times10^{-6})(0{,}025)}{10\times10^{-9}} = 4{,}866\times10^{-9}\ F$$

C = 4,9×10^{-9} F

Con dos cifras significativas nos da el mismo resultado, esto se debe a que el espesor de la membrana es mucho menor que las otras dimensiones del cilindro y por lo tanto la aproximación de que son dos placas infinitas separadas por una distancia de 10nm es buena.

Ejemplo: ejercicio 2.2.4

2.2.4- El transporte activo de sodio debido al bombeo Na-Ka se realiza a un ritmo de $3{,}0\times 10^{-7}$ mol/m^{2}s. Para 1,0 m^2 de membrana, hallar:

a) La corriente en amperios debida a los iones de sodio.

b) La potencia consumida contra las fuerzas eléctricas si el potencial de reposo es de -90 mV.

Cada segundo y por m^2 se transportan $3{,}0\times10^{-7}$ moles de iones de sodio, c/u con una carga e.

Cada mol contiene $6{,}022\times10^{23}$ iones de sodio, por tanto la corriente que se transporta vale:

$$I = 3{,}0 \times 10^{-7}\,\frac{mol}{m^2 s} \times 6{,}022 \times 10^{23}\,\frac{iones}{mol} \times 1{,}602 \times 10^{-19}\,\frac{C}{ion} = 0{,}0289\,\frac{C}{m^2 s}$$

Cada metro cuadrado transporta una corriente de 0,0289 A (0,028 A). **28 mA**

Potencia: 0,0289 A × 0,090 V =0,00260 W 2,6 mW

Ejemplo: ejercicio

2.2.5- La concentración de K^+ en el interior de un axón es de 155 mol/m^3 y en el exterior es de 4,0 mol/m^3.

a. ¿Cuál es el potencial de equilibrio a 37°C?

b. En qué sentido van los flujos de potasio debido a la difusión y al campo eléctrico si el potencial del axón es de aproximadamente -90 mV? ¿Cuál flujo será mayor?

$$q(V_i - V_o) = k_B T \ln\left(\frac{C_O}{C_i}\right)$$

$q = e = 1{,}60\times10^{-19}$ C

$k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K

T= 37+273 = 310 K

Co= 8,0 mol/m^3 Ci= 165 mol/m^3

$$(V_i - V_o) = \frac{k_B T}{q}\ln\left(\frac{C_o}{C_i}\right) = \frac{(1{,}38\times10^{-23}J/K)(310K)}{(1{,}60\times10^{-19}C)}\ln\left(\frac{4}{155}\right) = -98\,mV$$

Potencial ligeramente mayor (en valor absoluto) que el potencial de reposo (-90 mV), por tanto el flujo hacia adentro debido a la diferencia de potencial no es tan grande como el flujo hacia afuera debido a la diferencia de concentraciones.

Si *(V_i - V_o) fuera -90 mV,* entonces ambos flujos se contrarrestarían exactamente.

Es mayor el flujo debido a la difusión, por lo que se deben bombear iones de potasio hacia el interior.

Ejemplo: ejercicio 2.2.6

2.2.6- Hasta ahora estudiamos estáticamente las propiedades resistivas y capacitivas de un axón. Veremos qué sucede cuando se lo somete a un estímulo débil. Entendemos como estímulo débil a aquel que no provoca un potencial de acción. Modelaremos el impulso como una fuente de corriente continua y al axón como una serie de resistores y capacitores, acorde a las propiedades que venimos estudiando hasta ahora. Supongamos que tenemos un axón con mielina de 2,5 cm de longitud, 5,0 μm de radio de axoplasma, resistencia por unidad de membrana de R_m = 40 Ω.m^2, 10 nm de espesor de membrana, y constante dieléctrica κ = 7,0

a) Modelemos el axón como un circuito *RC* en serie, con *R* siendo la resistencia del axón a través del axoplasma y *C* la capacitancia de su membrana celular. Si cuando comienza el estímulo (se prende la batería) la carga del capacitor era nula, calcule cuánto tiempo le toma al capacitor en llegar a la mitad de su carga total, y cuánto le toma cargarse al 99%. ¿Estos resultados dependen de la intensidad del estímulo (representado por la batería)? ¿Es realista que así sea?

b) En el modelo anterior ignoramos la resistencia de pérdida. Supongamos que, al irse el estímulo, la carga acumulada se pierde a través de la membrana celular. Modelamos entonces la descarga mediante un circuito RC en serie sin fuente, donde *C* es la capacidad de la membrana celular, y $R = R_0$ es la resistencia de pérdida del axón con mielina. ¿Cuánto demora, aproximadamente, en descargarse completamente el capacitor? ¿Qué tomó menos tiempo, la carga o la descarga?

c) Esboce el gráfico de la carga como función del tiempo para este axón en el caso de que la carga inicial era nula, aparece el estímulo hasta que el capacitor se carga completamente, y luego se descarga a través de la resistencia de pérdida.

ρ_a = 2,0 Ω.m, C_m = 5,0×10^{-5} F/m^2; R_m = 40 Ω.m^2; r = 5,0 μm = 5,0×10^{-6} m;
L = 2,5 cm = 0,025 m; d =10 nm =1,0×10^{-8} m

$$R = \frac{\rho_a L}{\pi r^2} = \frac{(2{,}0)(0{,}025)}{\pi(5{,}0\times10^{-6})^2} = 6{,}366\times10^{8}\ \Omega$$

$$C = \kappa\varepsilon_0\frac{A}{d} = \kappa\varepsilon_0\frac{2\pi rL}{d} = (7{,}0)(8{,}85\times10^{-12})\frac{2\pi(5{,}0\times10^{-6})(0{,}025)}{10\times10^{-9}} = 4{,}866\times10^{-9}\ F$$

Ejemplo: ejercicio 2.2.6

Constante de tiempo en la carga:

$$\tau = RC = (6{,}366\times 10^{8})(4{,}866\times 10^{-9}) = 3{,}098\, s$$

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

t_1 es el tiempo en que alcanca el 50% de la carga y t_2 el 99%.

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \qquad \frac{1}{2} = e^{-\frac{t_1}{RC}} \qquad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\frac{t_1}{RC}}\right) = -\frac{t_1}{RC} \qquad \ln(2) = \frac{t_1}{RC}$$

$$t_1 = RC\ln 2 = 3{,}098\ln 2 = 2{,}147\, s$$

t_1 = 2,1 s

$$q(t_2) = \frac{99}{100}Q_f = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t_2}{RC}}\right) \qquad \frac{99}{100} = \left(1 - e^{-\frac{t_2}{RC}}\right) \qquad \frac{1}{100} = e^{-\frac{t_2}{RC}}$$

$$\ln(100) = \frac{t_2}{RC} \qquad t_2 = RC\ln 100 = 3{,}098\ln 100 = 14{,}267\, s$$

t_2 = 14 s

b) Descarga del capacitor: $q(t) = Qe^{-\frac{t}{R_0 C}}$

$$R_0 = \frac{R_m}{2\pi r l} = \frac{40\ \Omega\mathrm{m}^2}{2\pi(5{,}0\times 10^{-6}\ m)(0{,}025\ m)} = 50.929.463\ \Omega$$

R_0 = $5{,}093\times 10^{7}\ \Omega$

C = $4{,}866\times 10^{-9}$ F

Ejemplo: ejercicio 2.2.6

Constante de tiempo en la descarga:

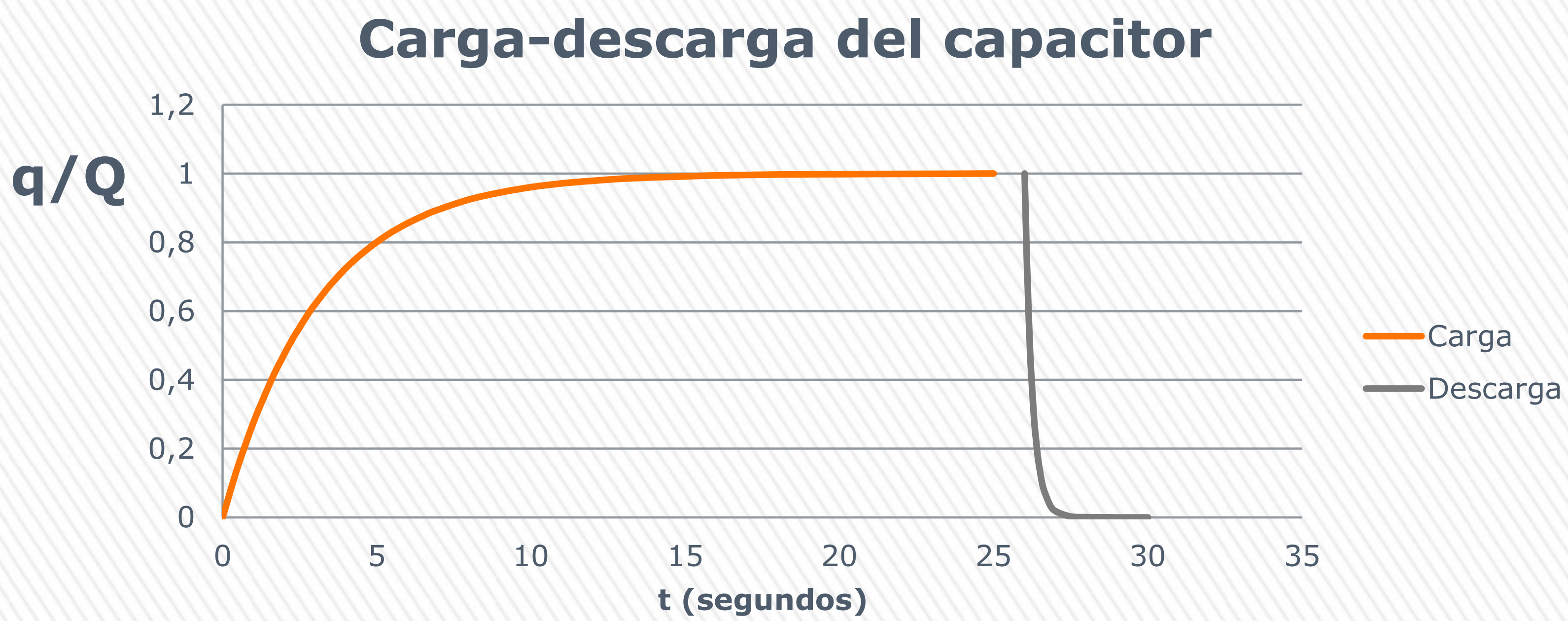
$$\tau_2 = R_0 C = (5{,}093 \times 10^{7})(4{,}866 \times 10^{-9}) = 0{,}2478\ s$$

Veamos cuánto demora en descargarse el 99%, es decir quedar con el 1,0% de la carga

$$\frac{Q}{100} = Q e^{-\frac{t_3}{R_0 C}} \qquad \ln(100) = \frac{t_3}{R_0 C}$$

$$t_3 = R_0 C \ln(100) = \tau_2 \ln(100) = 0{,}2478 \ln(100) = 1{,}1412\ s$$

Es decir que tarda 1,1 s en descargarse un 99%, mientras que tardaba 14 s en cargarse el 99%,



Ejemplo: ejercicio 2.2.7

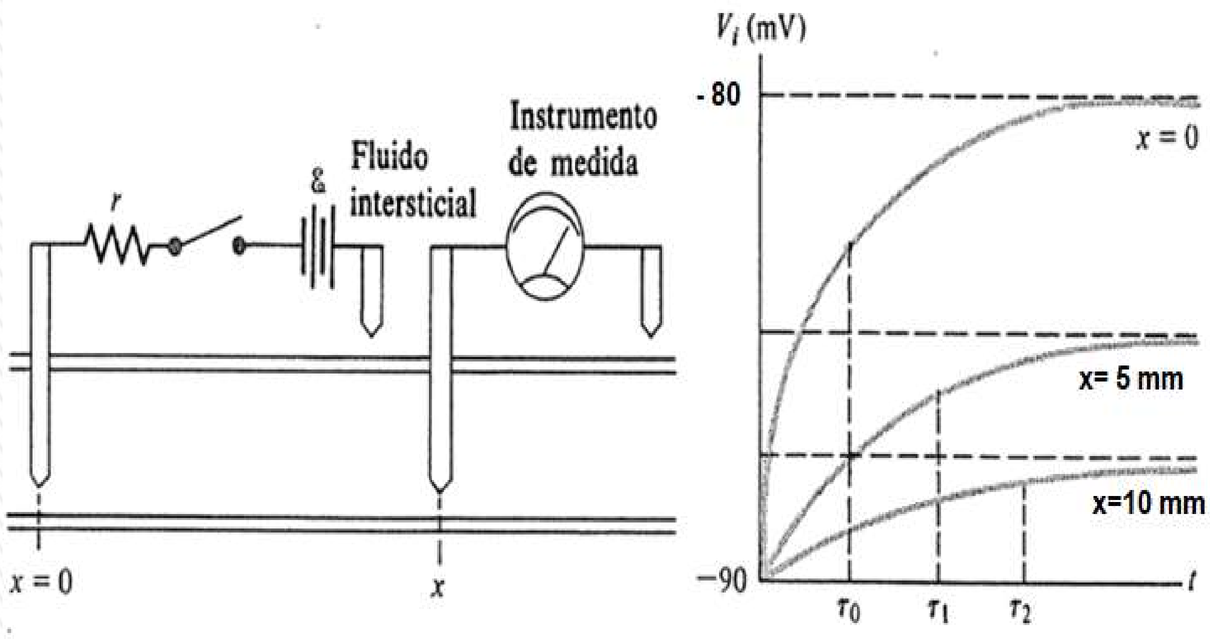
2.2.7- Un nervio con mielina cuyo parámetro espacial vale 0,50 cm se perturba en un punto donde su potencial se eleva desde su valor en reposo de -90 mV hasta -80 mV. Hallar en estado estacionario, a partir de ese punto, el potencial a: **a)** 0,50cm y **b)** 1,0cm.

$$V(x) = V_d e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

λ = 0,50 cm

V_d es la diferencia entre el potencial de reposo (-90 mV) y el potencial final en *x=0 al ser excitado (-80 mV):*

V_d = -90 – (-80) = - 10 mV



$$V(x = 0{,}50\ cm) = (-10mV)e^{-\frac{0{,}50}{0{,}50}} = -10e^{-1} = -3{,}678\ mV$$

$V_{0{,}50\ cm}$ = -90 mV – (-3,678) = -86,32 mV

$V_{0{,}50\ cm}$= -86,3 mV

$$V(x = 1{,}0\ cm) = (-10mV)e^{-\frac{1{,}0}{0{,}50}} = -10e^{-2} = -1{,}353\ mV$$

$V_{1{,}0\ cm}$ = -90 mV – (-1,353) = -88,646 mV

$V_{1{,}0\ cm}$= -88,6 mV

Ejemplo: ejercicio 2.2.7

2.2.7- Un nervio con mielina cuyo parámetro espacial vale 0,50 cm se perturba en un punto donde su potencial se eleva desde su valor en reposo de -90 mV hasta -80 mV. Hallar en el estado estacionario, a partir de ese punto, el potencial a:
a) 0,50 cm , y **b)** 1,0 cm.

$$V(x) = V_d e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

λ = *0,50 cm*
V_d es la diferencia entre el potencial de reposo (-90 mV) y el potencial final en *x=0 al ser excitado (-80 mV):*
V_d = -90 – (-80) = - 10 mV

$$V(x = 0{,}50\ cm) = (-10mV)e^{-\frac{0{,}50}{0{,}50}} = -10e^{-1} = -3{,}678\ mV$$

$V_{0{,}50\ cm}$ = -90 mV – (-3,678) = -86,32 mV

$V_{0{,}50\ cm}$= -86,3 mV

$$V(x = 1{,}0\ cm) = (-10mV)e^{-\frac{1{,}0}{0{,}50}} = -10e^{-2} = -1{,}353\ mV$$

$V_{1{,}0\ cm}$ = -90 mV – (-1,353) = -88,646 mV

$V_{1{,}0\ cm}$= -88,6 mV

Ejemplo: ejercicio 2.2.8

Hallar la velocidad de propagación de un potencial de acción y el tiempo necesario para que recorra 2m en un nervio con mielina de radio 1,0 µm y en otro de radio 20 µm.
A partir de estos resultados ¿cómo espera que sea el radio de aquellos axones que activan respuestas de huída en los animales en comparación con el radio de otros axones?

ρ_a = 2 Ω.m C_m= 5 ×10^{-5} F/m^2 r_1=1,0 µm r_2=20 µm L = 2 m X= 1 mm

Constante de tiempo: $$\tau = RC = \frac{\rho_a X}{2\pi r^2} C_m (2\pi r X) = \rho_a C_m \frac{X^2}{r}$$

Velocidad de propagación del potencial de acción:

$$v = \frac{X}{\tau} = \frac{X}{\rho_a C_m \frac{X^2}{r}} = \frac{r}{\rho_a C_m X} = 10\, r \left(\frac{m}{s}\right).\left(\frac{1}{\mu m}\right)$$

$$v_1 = 10\, r_1 \left(\frac{m}{s}\right).\left(\frac{1}{\mu m}\right) = 10\,(1{,}0\,\mu m)\left(\frac{m}{s}\right).\left(\frac{1}{\mu m}\right) = 10\, m/s \qquad t_1 = \frac{L}{v_1} = \frac{2{,}0\, m}{10\, m/s} = 0{,}2\, s$$

$$v_2 = 10\, r_2 \left(\frac{m}{s}\right).\left(\frac{1}{\mu m}\right) = 10\,(20\,\mu m)\left(\frac{m}{s}\right).\left(\frac{1}{\mu m}\right) = 200\, m/s \qquad t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{2{,}0\, m}{200\, m/s} = 0{,}01\, s = 10\, ms$$