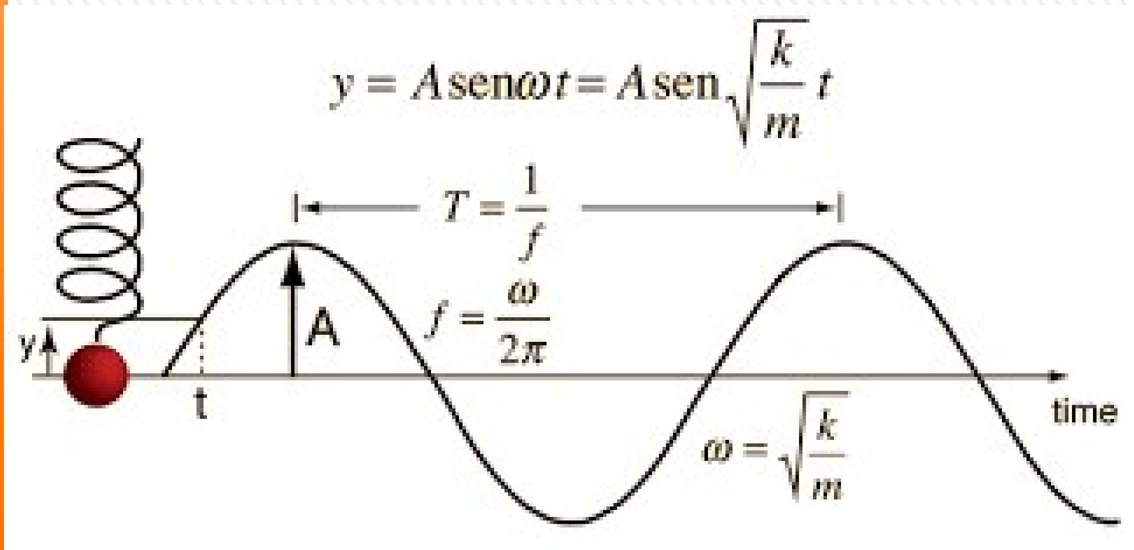
9-MOVIMIENTO PERIÓDICO Y ONDULATORIO



Las olas combinan propiedades de las ondas transversales y longitudinales. Con el equilibrio y el ritmo adecuados, un surfista puede capturar una ola y dar un paseo en ella.

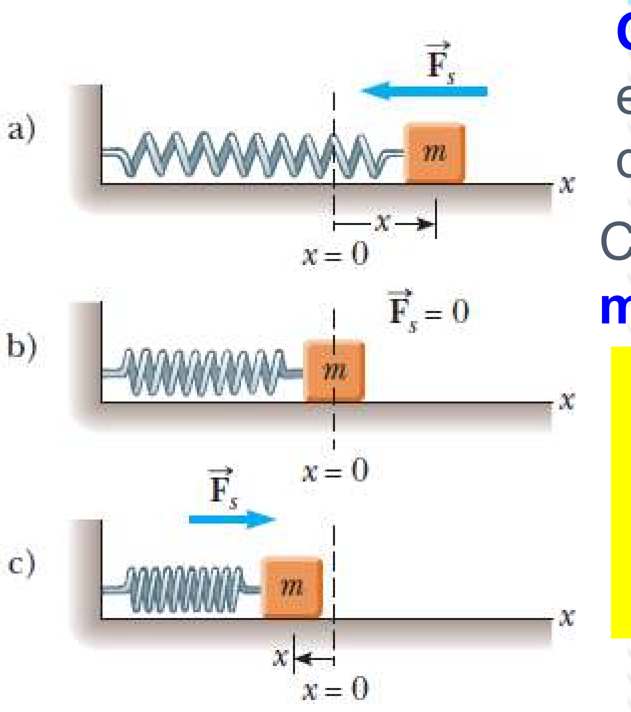
INTRODUCCIÓN- OSCILACIONES

Movimientos que se repiten una y otra vez: como el de un resorte, un péndulo de un reloj antiguo: **movimiento periódico u oscilación.**

Un cuerpo que tiene **un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable:** cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torque para hacerlo regresar al equilibrio; pero cuando llega ahí ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado… donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio.

Empezaremos analizando estos movimientos periódicos por el caso más sencillo: un **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE** que lo describe **sistema masa-resorte ideal**.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)



Oscilación: movimiento repetitivo alrededor de un punto de equilibrio estable debido a la acción de una fuerza o torque de restitución.

Caso más sencillo: **movimiento armónico simple**: sistema **masa resorte ideal**.

Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio, la oscilación se denomina ***movimiento armónico simple (MAS).***

Aplico la 2da. Ley de Newton: m.a= F = -kx Como: $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

ecuación del oscilador armónico $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

se puede probar que tiene como solución: $x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$

donde A y ϕ se determinan por las condiciones iniciales: x_0 y v_0.

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Otras formas de expresar la solución:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Amplitud del movimiento A, *magnitud máxima del desplazamiento* con respecto al punto de equilibrio (valor máximo de *x).*

Ciclo *o* ***vibración completa:*** *viaje completo* (de ida y vuelta), de *A a -A y de regreso a A, se recorre una distancia total de 4A.*

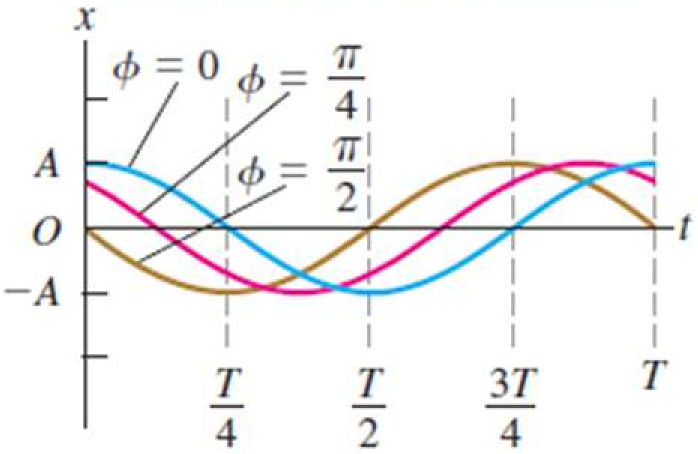
Periodo *T:* *tiempo que se tarda en realizar un ciclo.* $f = \frac{1}{T}$ ó $T = \frac{1}{f}$

Frecuencia *f :* *número de ciclos en la unidad de tiempo* (hertz: Hz)

Frecuencia angular, ω: 2π veces la frecuencia: ω = 2π*f* *(rad/s).* $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Constante de fase **ϕ ángulo de fase**, indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando *t = 0.*

Estas tres curvas muestran el MAS con periodo T y amplitud A iguales, pero ángulos de fase ϕ distintos.



Constante ϕ ángulo de fase, x_0 *posición en t = 0*

Sustituyo t = 0 y *x =* x_0 *se tiene:* $x_0 = A\cos\phi$.

Si ϕ = 0, entonces $x_0 = A\cos 0 = A$; *por lo tanto, la partícula parte desde el máximo desplazamiento positivo*

si ϕ = π, entonces $x_0 = A\cos\pi = -A$;

por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo máximo;*

si ϕ = π/2, *entonces* $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

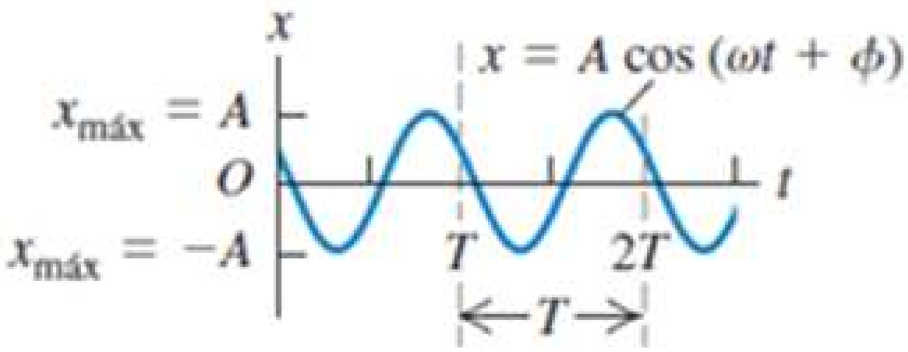
Derivando obtenemos:

(cos u)’ = -sen(u)* u’

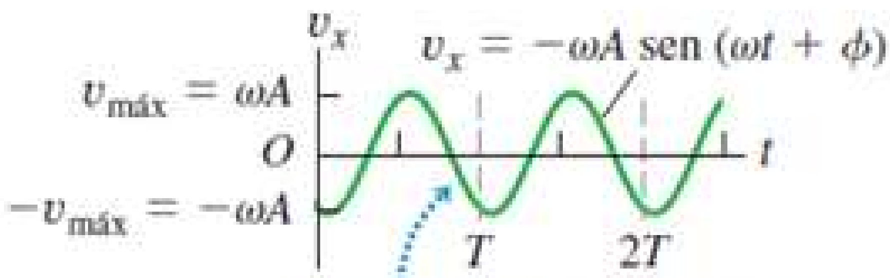
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi$$

a) Desplazamiento x en función del tiempo t

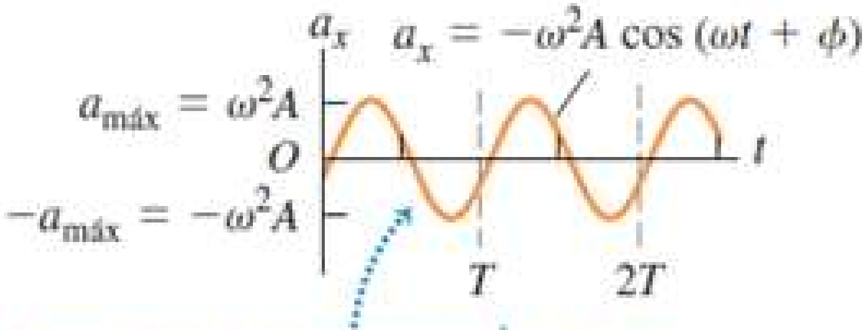


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x–t se desplaza por $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica x–t.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y $\frac{1}{2}$ ciclo con respecto a la gráfica x-t.

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Fuerza del resorte única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo.
La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que **se *conserva la* energía mecánica total del sistema**.

Também supondremos que la masa del resorte es despreciable.

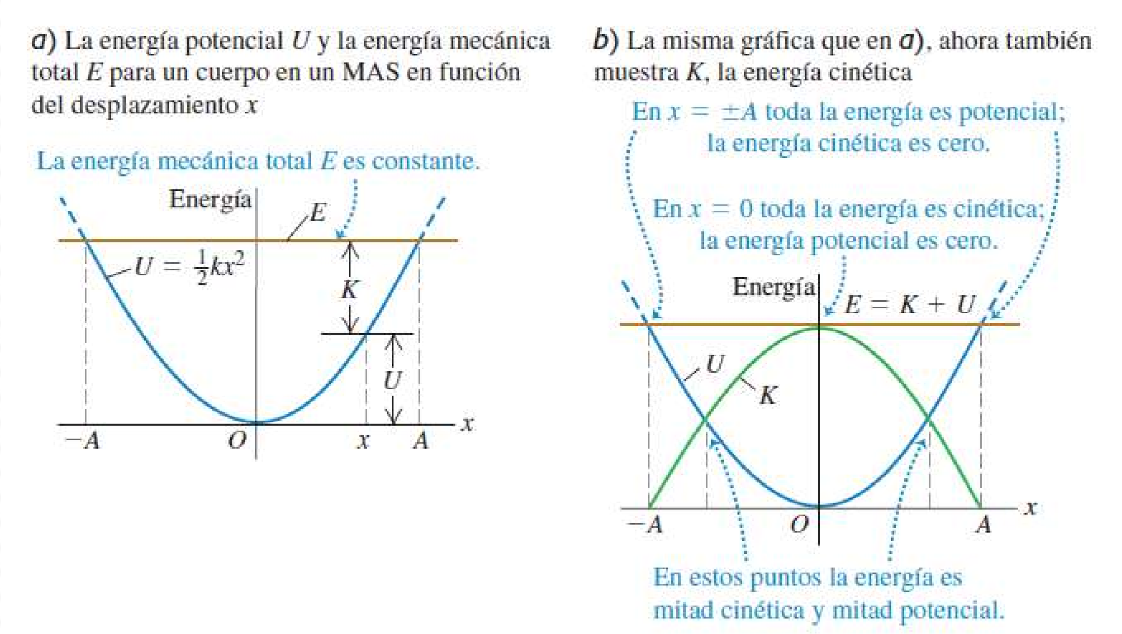
Como no hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

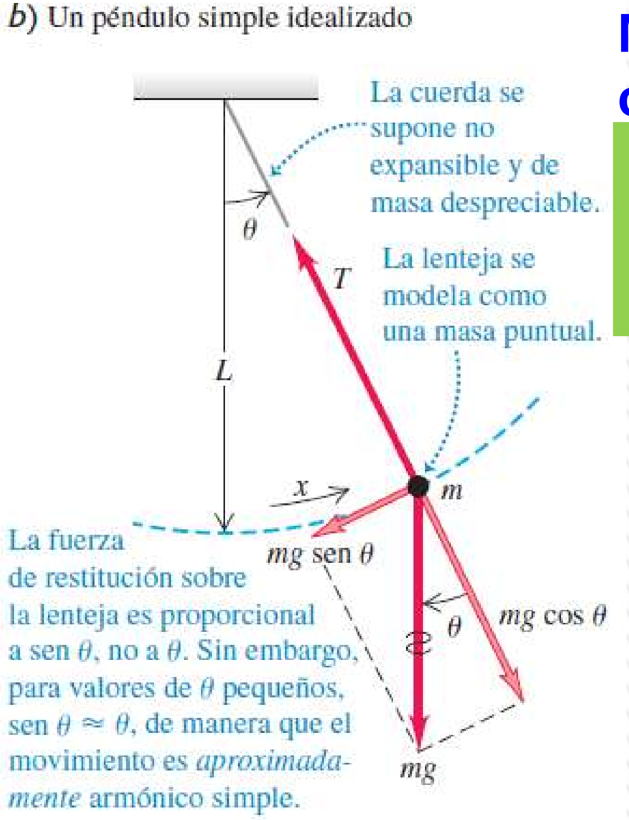
$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$



PÉNDULO SIMPLE



Modelo idealizado: masa puntual suspendida de una cuerda no extensible y de masa despreciable.

La trayectoria de la partícula puntual con masa (llamada pesa o lenteja) es un arco de un círculo de radio *L igual a la longitud de la* cuerda.

La **fuerza de restitución F_θ *es la componente* tangencial de la fuerza neta**:

$$F_\theta = -mg\sin\theta$$

si el ángulo θ es pequeño, sen θ es casi igual a θ en radianes

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

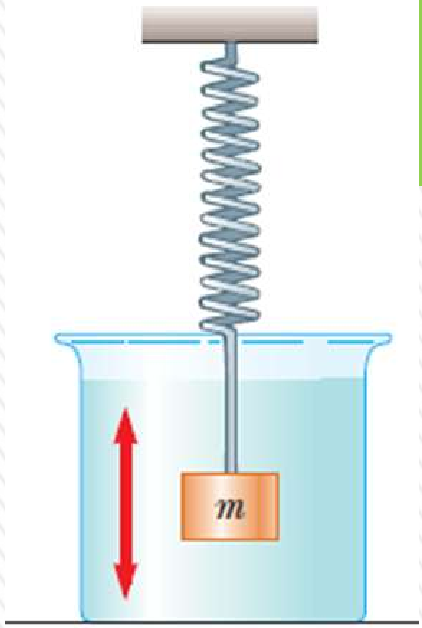
$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Se puede extender el modelo a un caso más realista: el péndulo físico

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Los sistemas reales siempre tienen fuerzas disipativas, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada.



La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipativas se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente **oscilación amortiguada.**

Caso más sencillo: oscilador armónico simple con fuerza de amortiguamiento por fricción proporcional a la *velocidad del cuerpo* oscilante.

Actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, *donde* $v_x = dx/dt$ *es la velocidad y b es la* ***constante de amortiguación*** *que describe la intensidad* de la fuerza amortiguadora.
El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *neta que actúa sobre el cuerpo :*
$\Sigma F_x = -kx - bv_x$

Ecuación diferencial en *x, de segundo orden.* $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña $b < \sqrt{4km}$

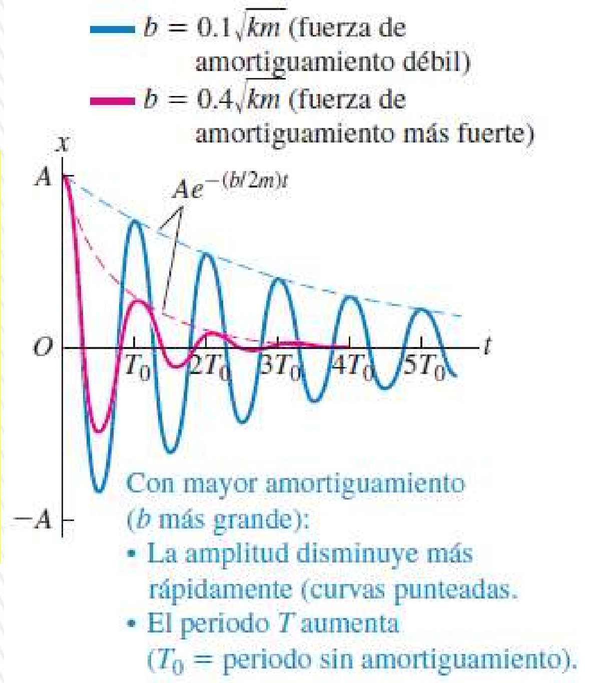
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi) \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

La *condición se* llama **subamortiguamiento. El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente.**

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



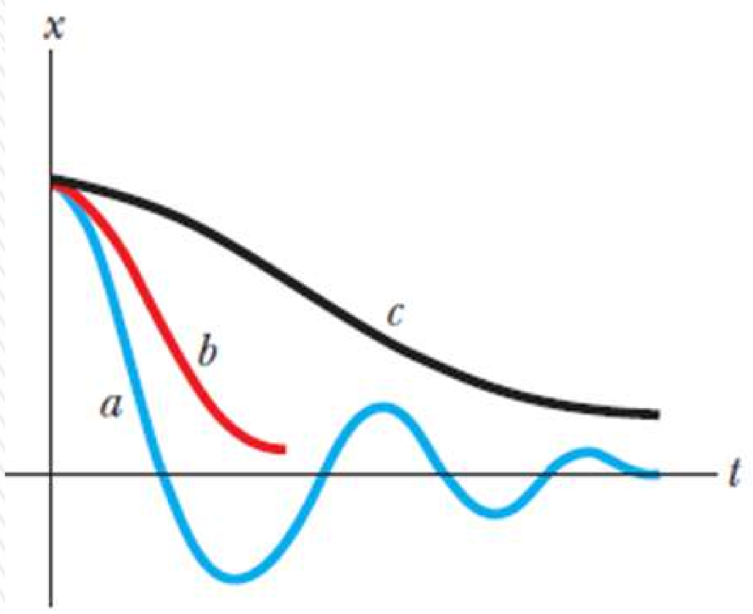
Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.
Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**

1) La amplitud $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ *no es constante, sino que disminuye con* el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-bt/2m}$.
Cuanto mayor sea el valor de *b, la amplitud disminuirá más rápidamente.*

2) La frecuencia angular ω' ya no es igual $\omega = \sqrt{k/m}$ sino un poco menor, y se vuelve cero si *b es tan grande que* $b = \sqrt{4km}$

Si eso se cumple, tenemos un **amortiguamiento crítico.** El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta (gráfica.en rojo).

Si *b es mayor que la condición crítica se denomina* ***sobreamortiguamiento.***
No hay oscilación, el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico (gráfica color negro).



OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Un oscilador amortiguado deja de moverse tarde o temprano, aunque se puede mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódicamente, con periodo y frecuencia definidos, esta fuerza se denomina **fuerza impulsora.**

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos a un oscilador armónico amortiguado una fuerza impulsora que varíe periódicamente con **frecuencia angular ω_d**, se obtiene una **oscilación forzada**, diferente al movimiento que se da con una **frecuencia angular natural ω'**. *Entonces la masa oscila a* la frecuencia angular ω_d,

Si hacemos que el oscilador vibre con una frecuencia angular ω_d por ejemplo con una fuerza impulsora *sinusoidal:* $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$ casi *igual a la frecuencia angular* ω', la amplitud de la oscilación resultante es mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes.

Al variar la frecuencia ω_d *de la fuerza impulsora, la amplitud* de la oscilación forzada resultante varía.

Cuando hay poco amortiguamiento*, la amplitud tiene un pico* marcado conforme ω_d se acerca a ω'.
Si aumenta el amortiguamiento (*b mayor), el pico* se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

La ecuación de movimiento es ahora:

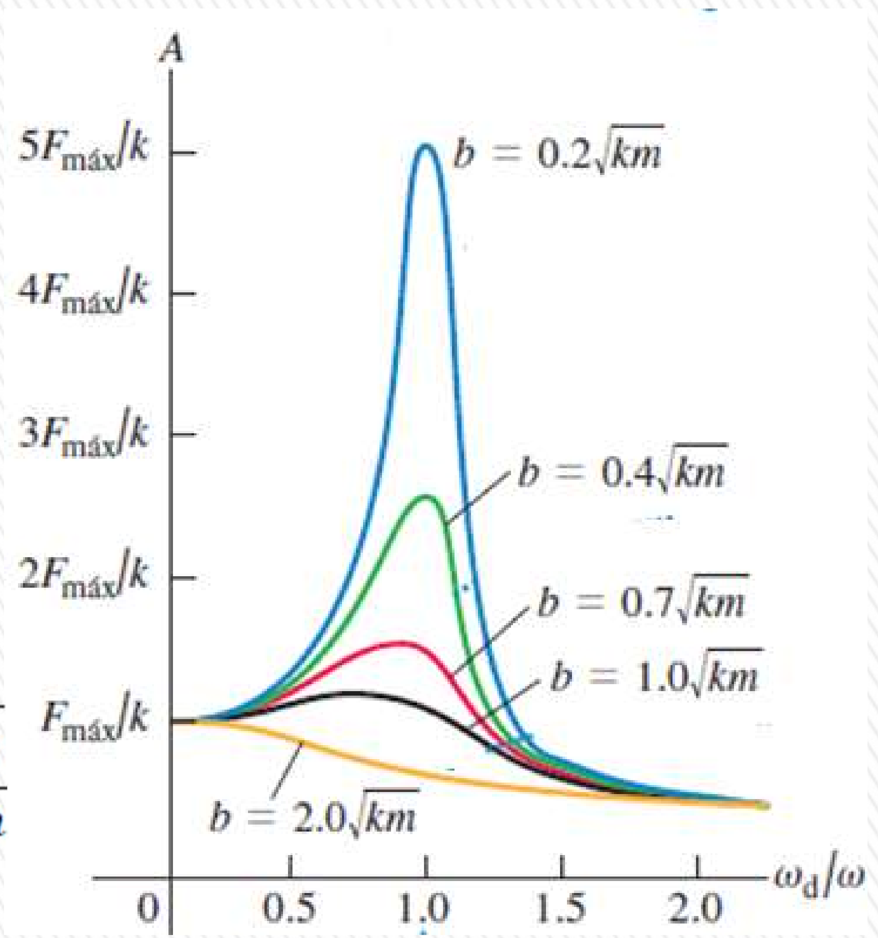
$$F_{max}\cos\omega_d t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La amplitud *A de la oscilación* forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora sinusoidal:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + (b\omega_d)^2}}$$

Si $k=m\omega_d^2$ el primer término bajo el radical es cero y A tiene un máximo cerca de

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



La altura de la curva en este punto es proporcional a 1/b; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico.

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia.**

Ejemplos de resonancia; aumentar las oscilaciones de un niño en una hamaca, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural de la hamaca.

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.1

Un resorte se estira 5,0 cm cuando se le cuelga una masa de 0,300 kg.
a) ¿Cuál es la constante del resorte?
b) Si la masa se estira 10,0 cm de la posición anterior, ¿cuál es la amplitud y el periodo de oscilación?

a) Al suspenderse la masa *m*, estira el resorte una cantidad ΔL de mdo que la fuerza elástica del resorte equilibra el peso de la masa:

$$mg = k\Delta L$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{(0{,}300)(9{,}8)}{0{,}050} = 58{,}8\ N/m$$

k= 59 N/m

b) Supongo que la masa se estira y se suelta con velocidad inicial nula, por lo que:
$x(0) = x_0 = 0{,}100$ m; $v(0) = v_0 = 0$.

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Entonces: $\Phi = 0$ y A= $x_0 = 0{,}100$ m

A= 0.10 m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{58{,}8}{0{,}300}} = 14\ rad/s \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14} = 0{,}4488\ s$$

T= 0.45 s

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) = (0{,}10\ m)\cos\big((14\ rad/s)t\big)$$

INTRODUCCIÓN: ONDAS

Ondas: perturbación del estado de equilibrio de un sistema, la cual se *propaga* de una región del sistema a otra, transportando energía.

Ondas mecánicas: las que viajan por un material (*medio)*. No todas las ondas son mecánicas.

Ondas *electromagnéticas* (luz, ondas de radio, radiaciones infrarroja y ultravioleta, rayos X) se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde *no* hay un medio material.

Características de las ondas:

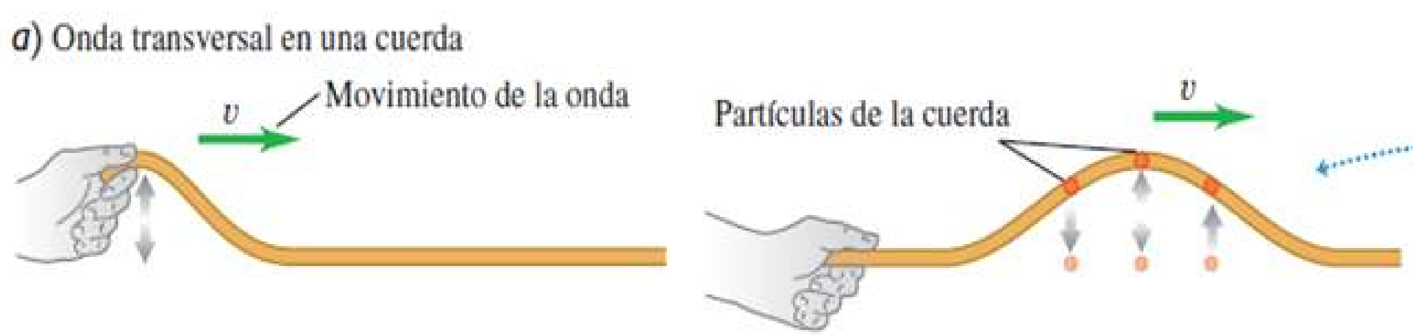
•La perturbación se *propaga por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de propagación* o rapidez de la onda o de fase (v),

•El medio mismo no viaja en el espacio. *Ejemplo de la "ola" en un estadio.*

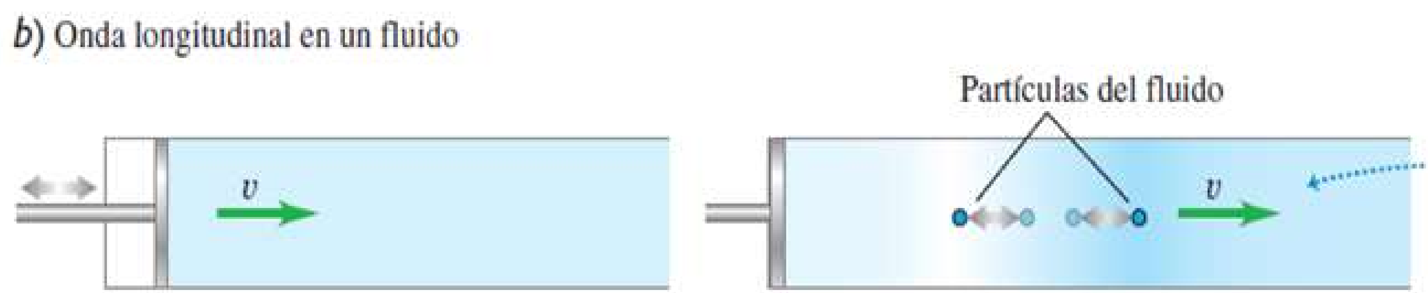
•*Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento, pero no materia, de una región a otra.*

Veremos ecuaciones básicas que describen las ondas, en especial las ***ondas sinusoidales*** donde el patrón de la onda es una función repetitiva seno o coseno. Ejemplo más sencillo: ondas periódicas que viajan por una cuerda estirada.

TIPOS DE ONDAS MECÁNICAS

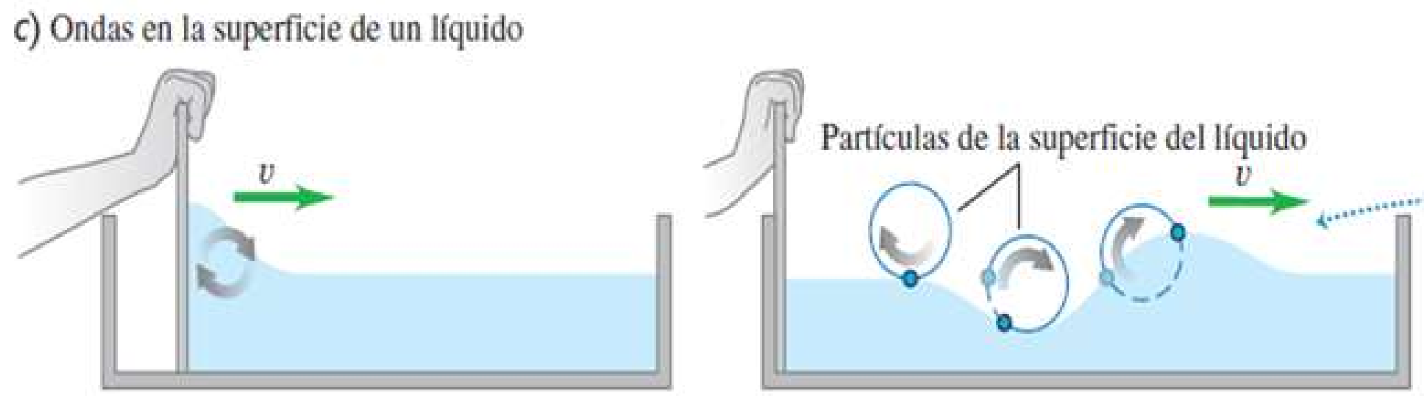


Medio: cuerda tensa. Los desplazamientos del medio son perpendiculares o *transversales a* la dirección en que la onda viaja por el medio, se trata de una **onda transversal**.



***Medio: líquido o gas en un tubo con pared rígida* en un extremo derecho y un pistón en el otro**.

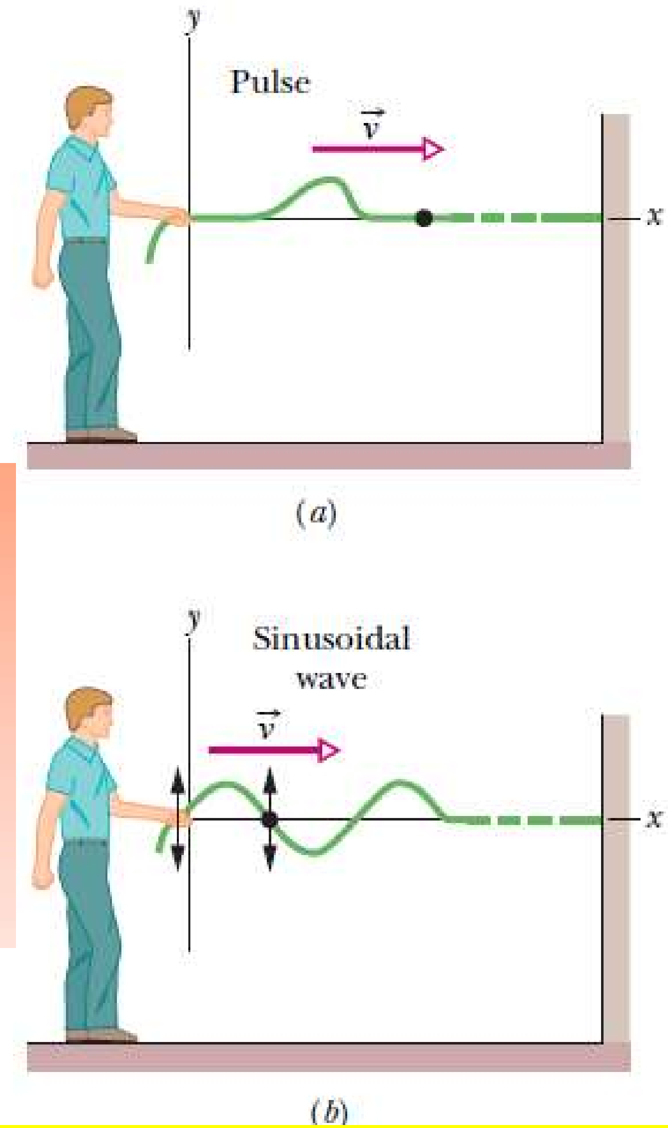
Los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la *misma dirección en que viaja la onda,* se trata de una **onda longitudinal**.



Medio: líquido en un canal**, agua en una zanja.* Desplazamientos del agua tienen componentes ***tanto longitudinales como transversales.

Tipos de ondas mecánicas

La caída de una piedra en un estanque o cuando se agita brevemente una cuerda por un extremo, son un solo **pulso ondulatorio** que viaja a partir de la perturbación.
También se presentan de forma continua (trenes de ondas) y otras además en forma regular: **ondas periódicas.**



La función que representa a la onda (para el caso unidimensional) la vamos a expresar como una función ***y(x,t),*** que por ejemplo puede representar la posición transversal de una cuerda que depende de dos variables: la posición *x* de cualquier elemento de la cuerda y en cualquier instante de tiempo *t.*

Función de onda unidimensional: y(x,t)

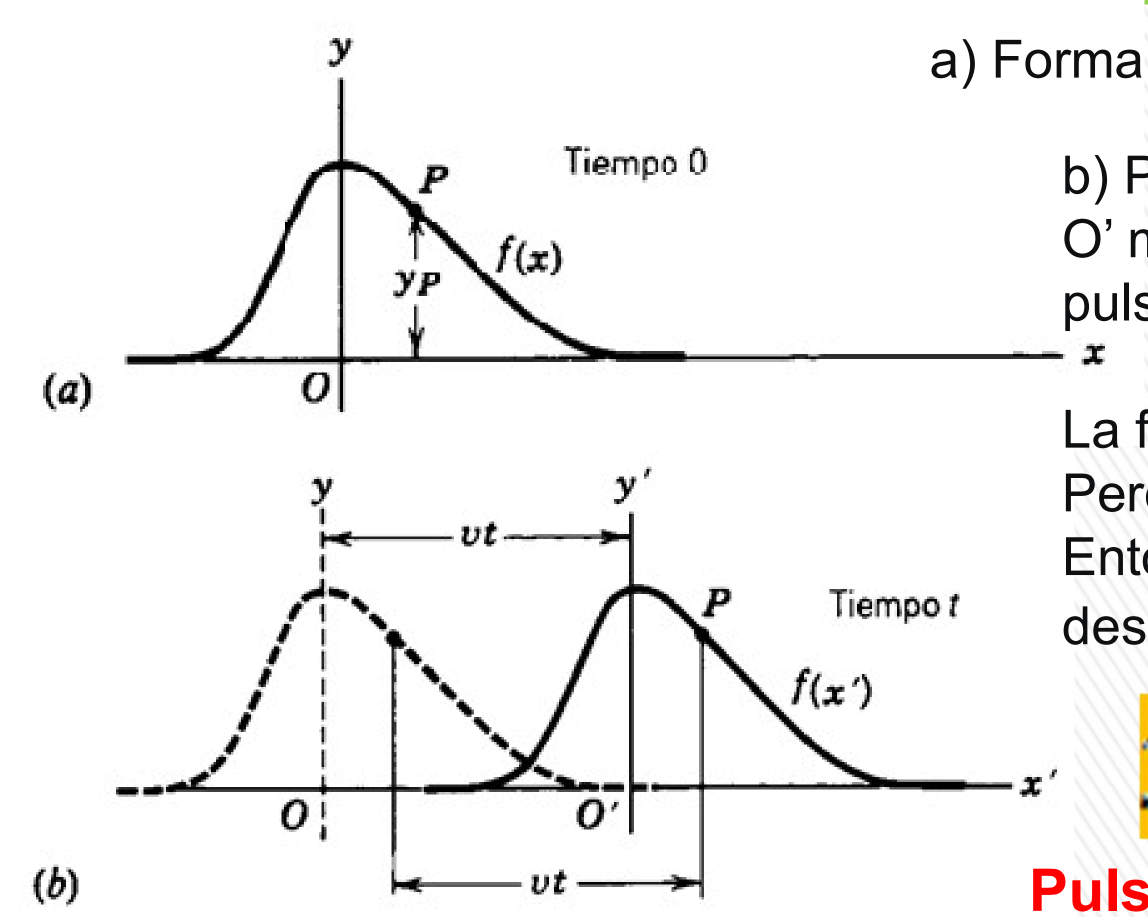
Se puede deducir la ecuación de onda plana unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\delta x^2}$$

Se prueba que cualquier función del tipo *f(x± vt)* es solución de la ecuación de onda

Si t es fijo (como en el caso de tomar una instantánea del pulso), la función de onda *y(x), a veces* llamada **forma de onda, define una curva que representa la forma geométrica del pulso** en dicho tiempo.

Movimiento de un pulso de onda



a) Forma del pulso de onda: *y(x,0)= f(x)*.

b) Pulso en un instante posterior.
O' marco de referencia que viaja con el pulso, hacia la derecha con velocidad *v*.

La forma se describe como *f(x')*.
Pero: *x'= x-vt*.
Entonces en un tiempo *t*, el pulso se describe como: *y(x,t)= f(x')= f(x-vt)*.

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Pulso que viaja hacia la derecha

Pulso que viaja hacia la izquierda: $$y(x,t) = f(x + vt)$$