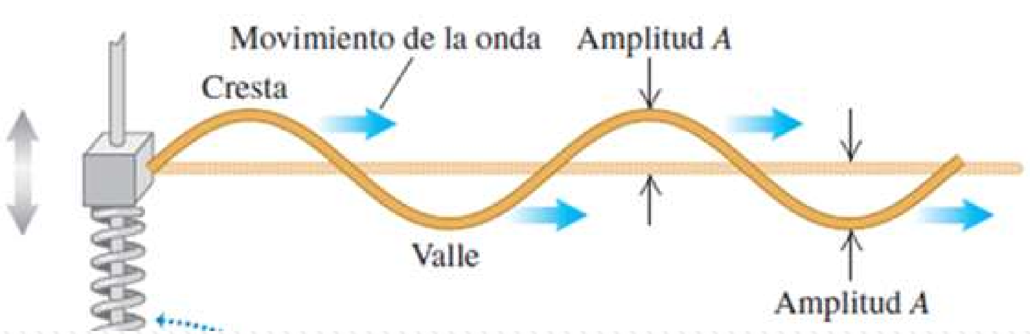
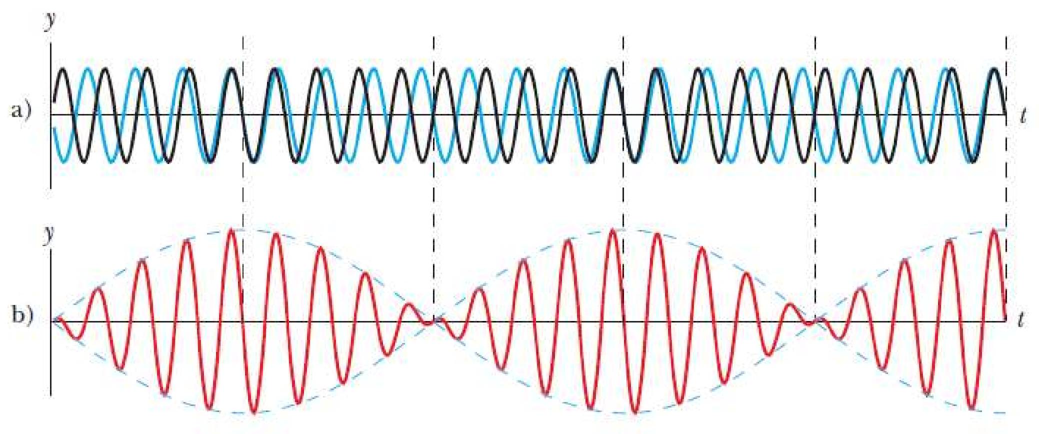
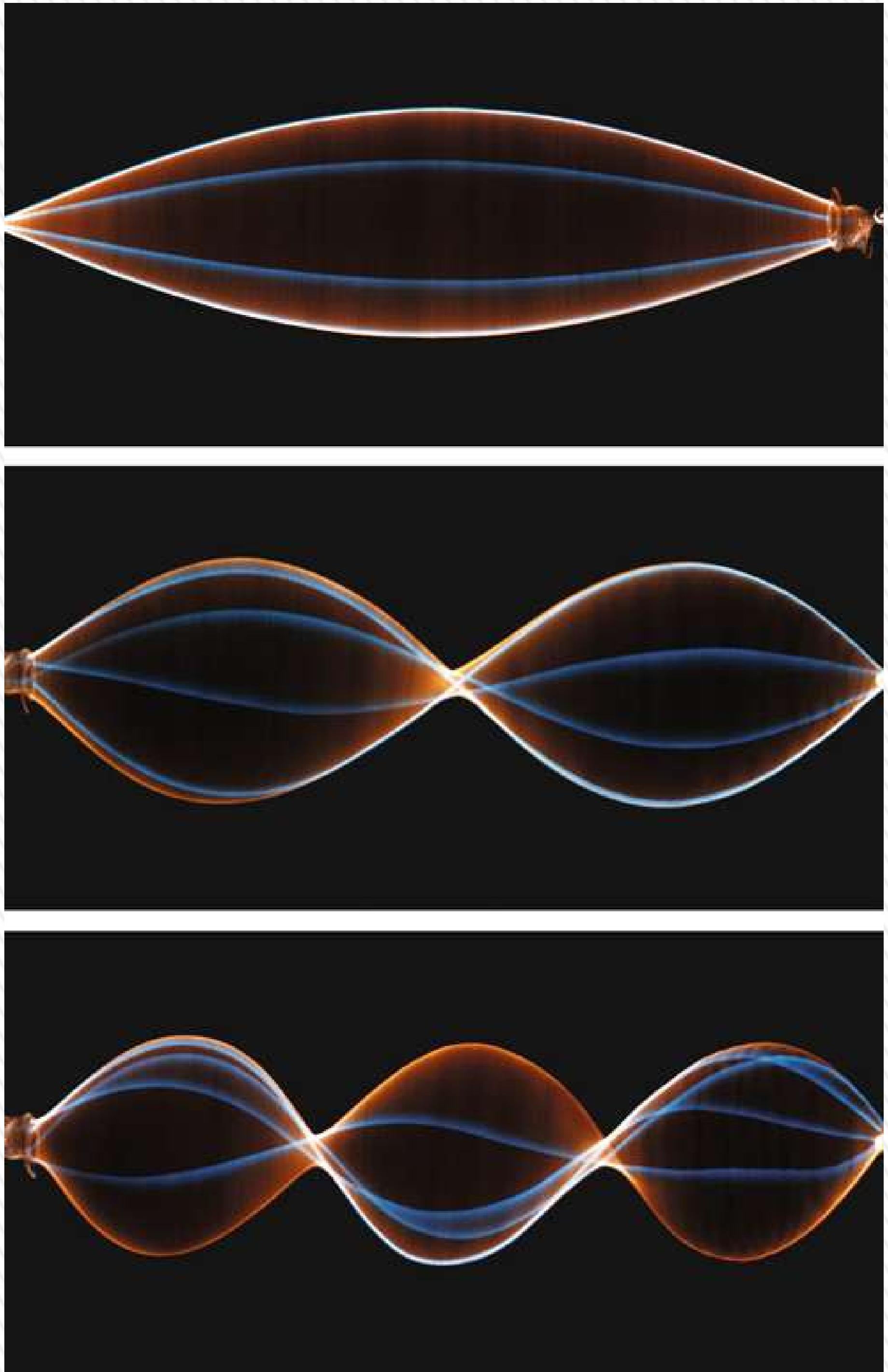
10-MOVIMIENTO ONDULATORIO







Repaso de la clase pasada de ondas

Ondas: perturbación del estado de equilibrio de un sistema, la cual se *propaga* de una región del sistema a otra, transportando energía.

Ondas mecánicas: las que viajan por un medio material. Las **electromagnéticas** no necesitan ningún medio material.

•La perturbación se *propaga por el medio con una rapidez definida llamada* ***rapidez de propagación*** **o rapidez de la onda o de fase (*v*)**,

•El medio mismo no viaja en el espacio, no hay transporte de materia.

•*Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento.*

Ondas transversales: *la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación (onda en una cuerda tensa)y* ***longitudinales****: la perturbación y la dirección de propagación coinciden (sonido).*

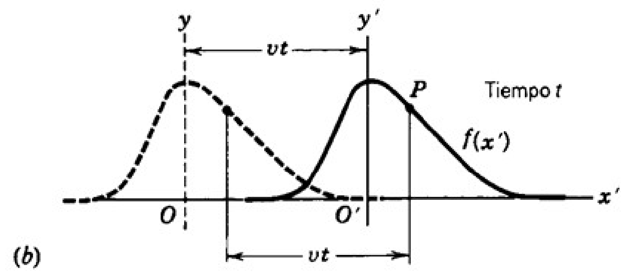
Hay ***pulsos*** *y* ***trenes de onda****.*

La **función** que representa a una **onda unidimensional** se expresa como una **función de 2 variables** ***y(x,t),*** que por ejemplo **y** puede representar la posición transversal de una cuerda que depende de dos variables: la posición *x* de cualquier elemento de la cuerda y en cualquier instante de tiempo *t.*

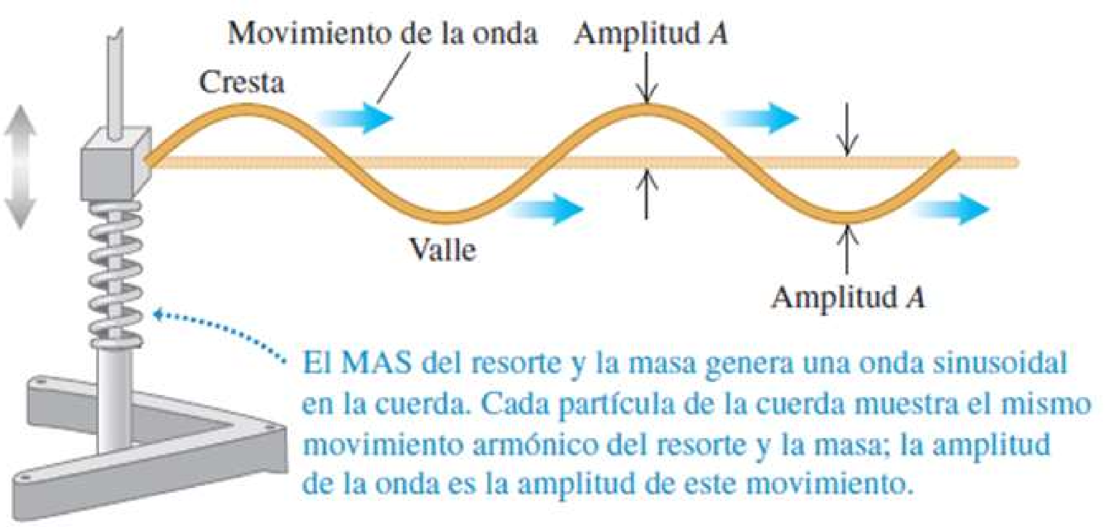
Ecuación de onda plana unidimensional $y(x,t) = f(x \pm vt)$

Sentido de propagación: signo de "-" hacia las *x* positivas, signo de "+" hacia las *x* negativas.

$y(x,t) = f(x-vt)$



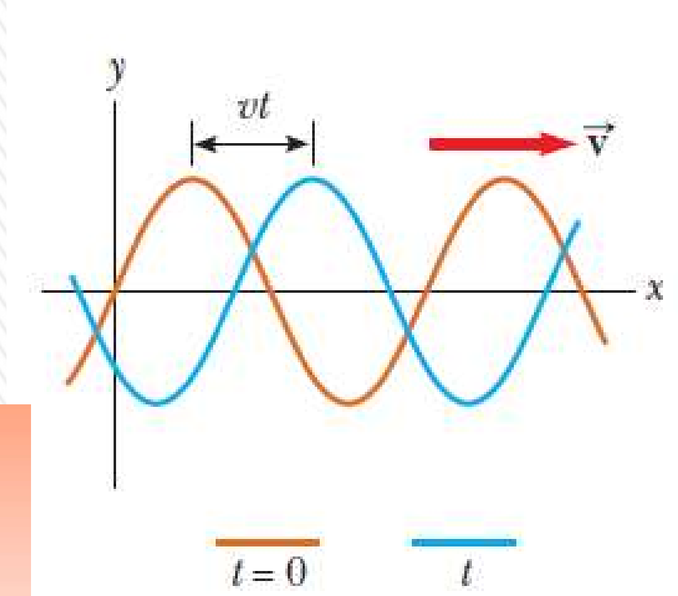
Ondas transversales periódicas



Si excito con un movimiento *periódico el extremo libre de la cuerda,* cada partícula de la cuerda también experimenta un movimiento periódico al propagarse la onda, se genera una **onda transversal periódica.**

Ejemplo: excitación por un ***movimiento armónico simple (MAS) de <u>amplitud</u> A y frecuencia f:*** la onda producida es una sucesión simétrica de *crestas y valles transversales:* ***onda progresiva sinusoidal***

La forma de onda completa se mueve hacia la derecha. *Si vemos* un elemento del medio (por ejem. *x= 0) se tiene que cada* elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje *y en un MAS: es el* **movimiento de los *elementos del medio*.**



Movimiento ondulatorio contra movimiento de las partículas: no se debe confundir el movimiento de la *onda transversal a lo largo de la cuerda con el de una partícula de la cuerda.*

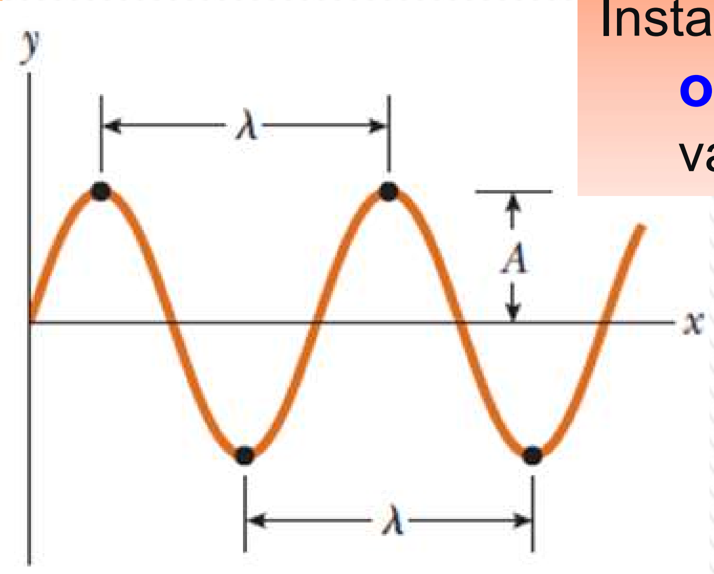
Ondas transversales periódicas

Las ondas periódicas generadas a través de un MAS son fáciles de analizar; las llamamos **ondas sinusoidales**.

Se puede probar que *cualquier onda* periódica puede representarse como una combinación de ondas sinusoidales (análisis de Fourier).

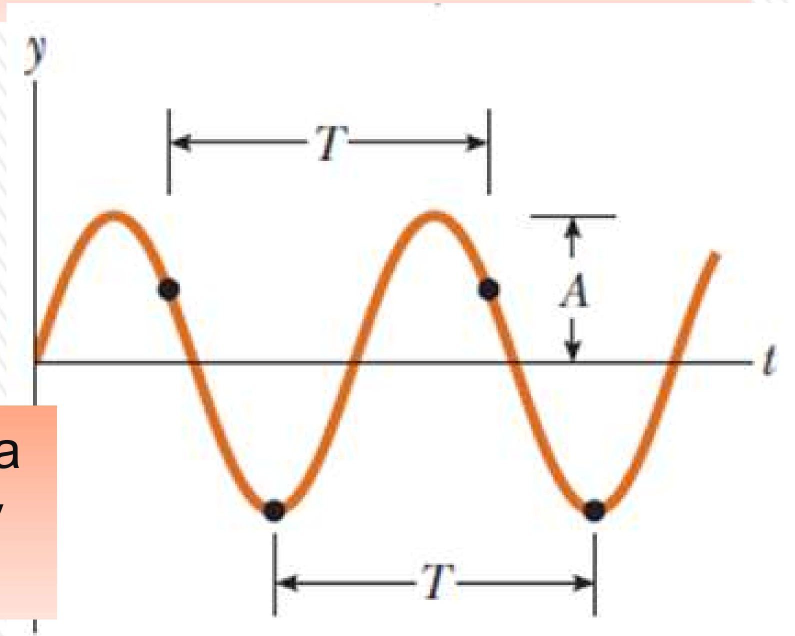
Cuando una onda sinusoidal pasa a través de un medio, todas las partículas del medio experimentan un MAS en el sentido transversal con la misma frecuencia.

La onda avanza con rapidez constante *v a lo largo de la cuerda; mientras que el movimiento de* la partícula es armónico simple y *transversal (perpendicular) a la longitud de la cuerda.*



Instantánea (foto) de una onda sinusoidal. La **longitud de onda λ** de una onda es la distancia entre crestas o valles adyacentes.

Posición de un elemento del medio como función del tiempo.



El **periodo *T*** *es el intervalo de* tiempo requerido para que el elemento complete un ciclo de su oscilación y para que la onda viaje una longitud de onda.

Ondas transversales periódicas

Longitud de onda (λ): distancia entre una cresta y la siguiente, o bien, entre un valle y el siguiente, o de cualquier punto al punto correspondiente en la siguiente repetición de la forma de la onda.

Una cresta de onda viaja una distancia de una longitud de onda, λ, en un tiempo igual a un periodo *T.*

Por lo tanto, la velocidad de la onda es v = λ /T.

Como f = 1/T,

$$v = \lambda f$$

La rapidez de propagación es igual al producto de la longitud de onda por la frecuencia.

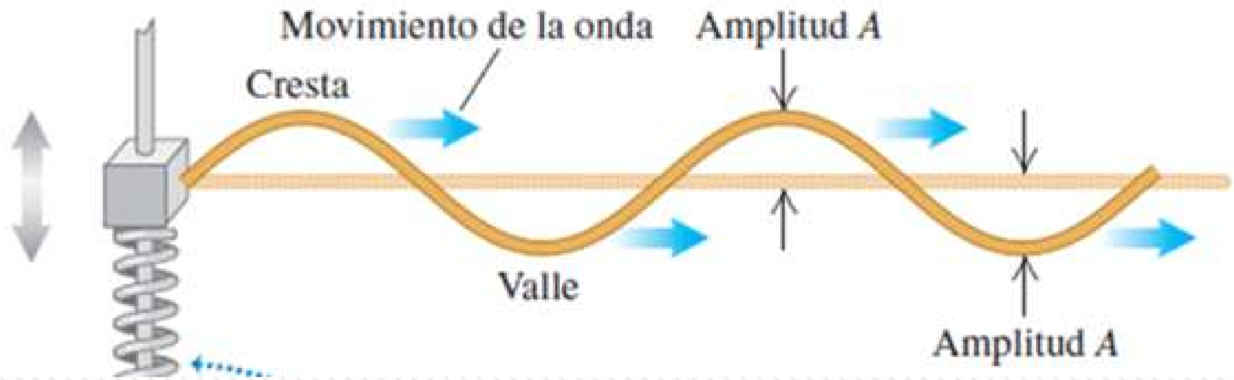
La onda avanza con rapidez constante *v a lo largo de la cuerda; mientras que el movimiento de* la partícula es armónico simple y *transversal (perpendicular) a la longitud de la cuerda con una velocidad dada por*

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ondas en una cuerda estirada (onda transversal periódica): despreciamos la curvatura de la cuerda por la gravedad, **posición de equilibrio es una línea recta (eje *x de un sistema de coordenadas*)**

Onda transversal: *una partícula en* la posición de equilibrio *x se desplaza cierta distancia y en la dirección perpendicular* al eje *x.*

Función de onda de una onda sinusoidal



Vamos a elegir una función de onda apropiada

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)\right)$$

Podemos considerar en forma indistinta , funciones de ondas sinusoidales tanto de la forma de seno o coseno, ya que *el coseno es un seno con un desfasaje de +π/2*

$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ o que $\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

Se puede hacer más general la ecuación anterior considerando diferentes valores del ángulo de fase, como se hizo para el MAS.

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt) + \varphi\right)$$

Es posible reescribir la función de onda dada por la ecuación anterior de varias formas distintas pero útiles. **Por simplicidad consideraremos ángulo de fase nulo y función coseno.**

Se define el **número de onda k** como: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Consideremos diferentes formas la ecuación de onda, que viaja hacia la derecha (es decir hacia la +x):

$$y(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) = A\cos(kx - \omega t)$$

Función de onda de una onda sinusoidal

$$y(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) = A\cos(kx - \omega t)$$

Onda que viaja en la dirección *x negativa*.

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} + t\right)\right] = A\cos\left[2\pi f\left(\frac{x}{v} + t\right)\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right] = A\cos(kx + \omega t)$$

La función y(x,t) también se puede describir como una función seno en lugar de una función coseno, y además puede tener una constante de fase Φ

Las **ondas periódicas** de cualquier tipo se caracterizan por las mismas magnitudes.

Frecuencia (f): es la cantidad de ondas que pasan por segundo en un punto y viene determinado por la fuente de la onda.

Periodo (T): es el tiempo entre sucesivas crestas y coincide con el inverso de la frecuencia $T = 1/f$.

Velocidad (v ó c): es la velocidad con que viaja la cresta de la onda.

Longitud de onda (λ): es la distancia entre dos crestas sucesivas.

Amplitud (A): valor máximo del desplazamiento, el desplazamiento de una onda periódica varía entre –A y +A.

Número de onda *k*: $k = 2\pi/\lambda$.

Fase de la onda: es el argumento de la función trigonométrica $(kx \pm \omega t + \phi)$

Velocidad y aceleración de partículas en una onda sinusoidal

Velocidad transversal (v_y) de cualquier *partícula en una onda transversal, la calculamos en un punto x dado, derivando* la función de onda *y(x, t) con respecto a t, manteniendo x constante, es decir calculamos una derivada parcial.*

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

La velocidad transversal de una partícula varía con el tiempo y su magnitud máxima es ω*A; la cual puede ser mayor, menor o igual que la rapidez de onda v, según* la amplitud y la frecuencia de la onda.

La *aceleración de cualquier partícula es la segunda derivada parcial de y(x, t) con* respecto a *t:*

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x,t)$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS

Cada tipo de onda tiene una velocidad característica, la cual depende del tipo del fenómenos físico, del tipo de onda, de las propiedades del medio en el que se propaga y algunas veces de la frecuencia.

VELOCIDAD DE UNA ONDA EN UNA CUERDA

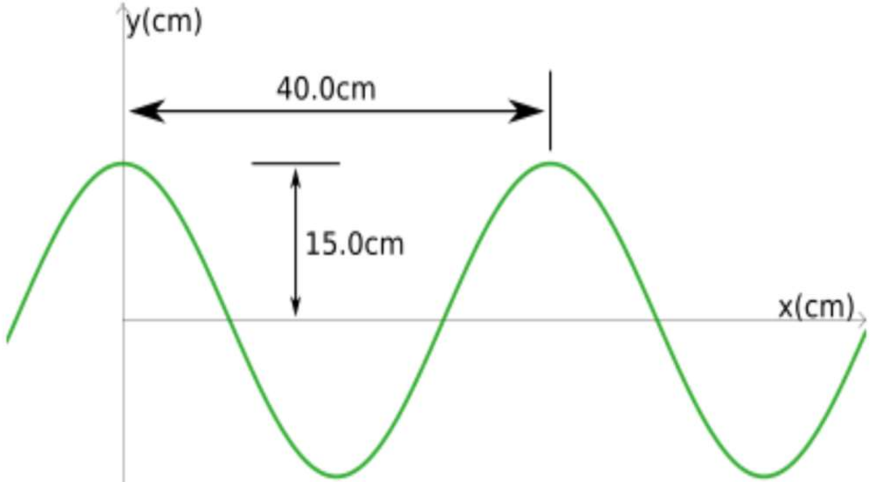
Cuando una onda se desplaza en una cuerda, su rapidez es igual a la raíz cuadrado del cociente entre la tensión en la cuerda *F* y la masa por unidad de longitud de la cuerda μ (m/L):

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Esta ecuación da la rapidez de onda únicamente para el caso especial de las ondas mecánicas en un alambre o una cuerda estirados.

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.6

Una onda sinusoidal progresiva en la dirección *x* positiva tiene una amplitud de 15,0 cm, longitud de onda de 40,0 cm y frecuencia de 8,00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en *t* = 0 y *x* = 0 también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura.



a) Encuentre el número de onda *k*, período *T*, frecuencia angular ω y rapidez *v* de la onda.

b) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}400\ m} = 15{,}7\ m^{-1}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00} = 0{,}125\ s$$

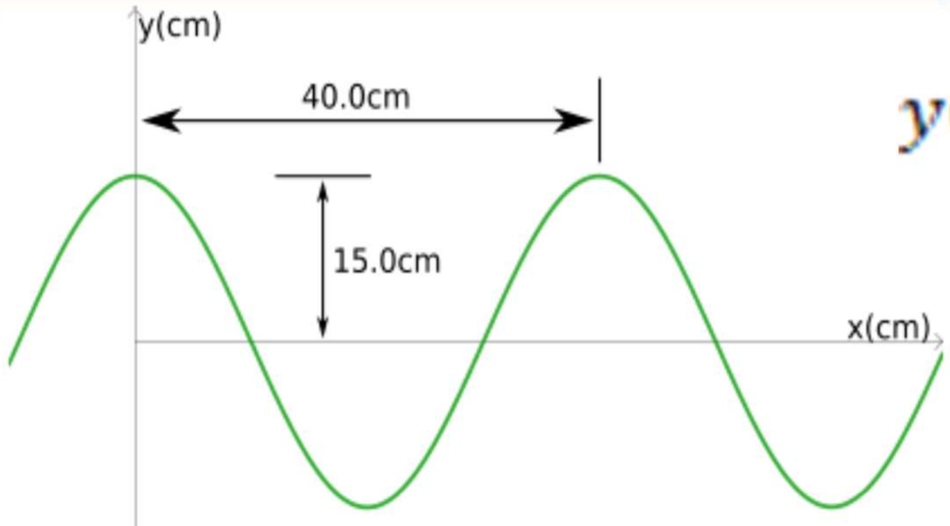
$$\omega = 2\pi f = 50{,}3\ rad/s$$

v= λ.f =(0,400) (8,00) = 3,2 m/s

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \psi)$$

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.6



$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \psi)$$

y (0,0) = A= A cos (ψ)

$\psi = 0$

$$y(x,t) = (0{,}150\ m)\cos\left((15{,}7\ m^{-1})x - (50{,}3\,\frac{rad}{s})\,t\right)$$

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

y (0,0) = A = A sen (Φ) = A sen ($\pi/2$) $\Phi = \pi/2$

$$y(x,t) = (0{,}150\ m)\sin\left((15{,}7\ m^{-1})x - \left(50{,}3\,\frac{rad}{s}\right)t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Interferencia y condiciones de frontera

Principio de superposición de ondas: la onda resultante de la interacción entre dos ondas o más, que se desplazan en el mismo medio y a la vez, es la suma de c/u de las ondas por separado.

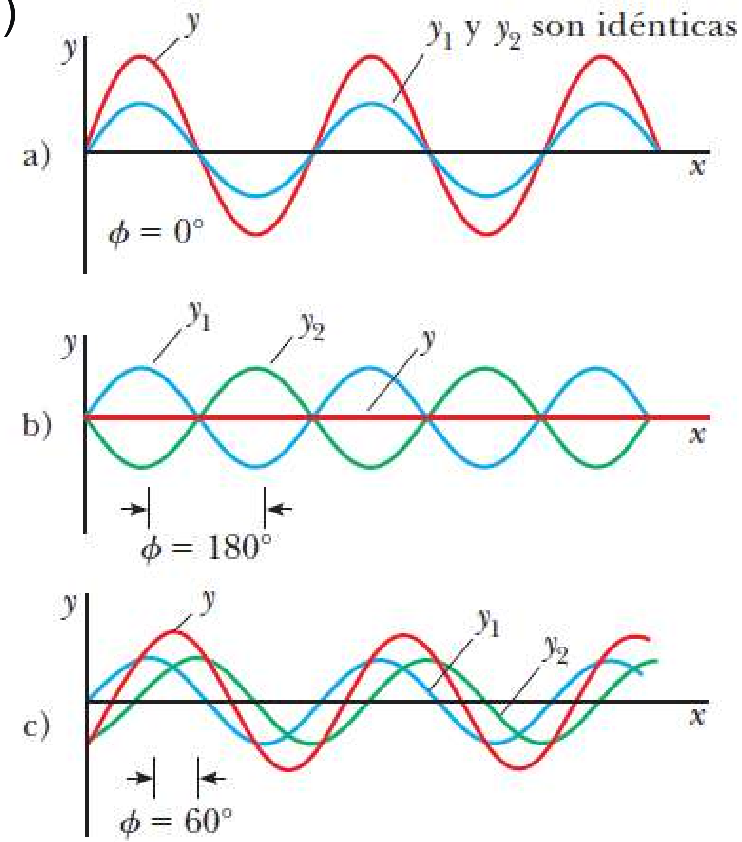
Interferencia: fenómeno en el que dos o más ondas se superponen para formar una onda resultante. La onda resultante puede ser mayor (interferencia constructiva) o menor (interferencia destructiva) que las ondas individuales.

La función de onda *y(x, t)* que describe el movimiento resultante se obtiene *sumando las dos* funciones de onda de las ondas individuales: $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

Dos ondas sinusoidales que viajan en la misma dirección en un medio lineal, con la misma frecuencia (o longitud de onda) y amplitud pero difieren en fase:

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t) \qquad y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y = 2A\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$



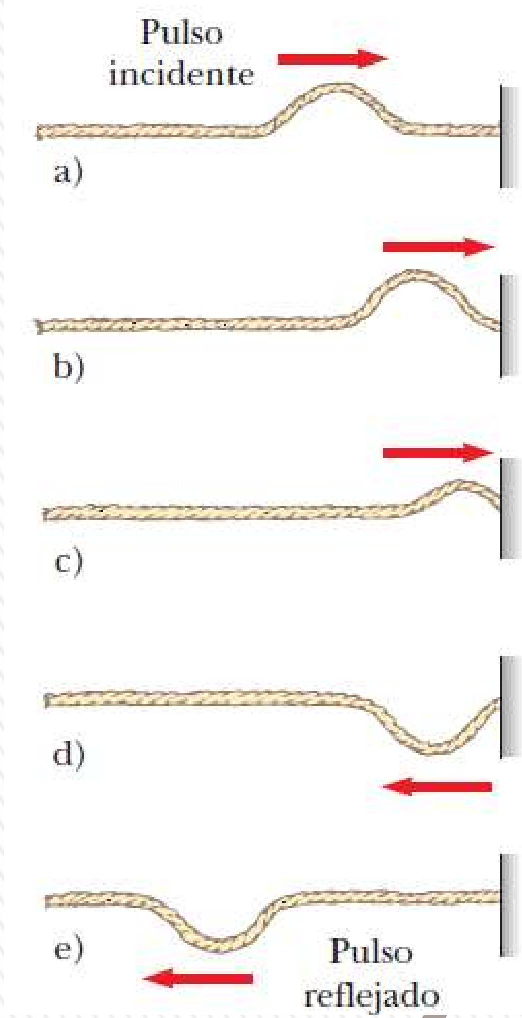
La onda resultante ***y*** también es sinusoidal, tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales (tiene los mismos valores de *k y ω) y su fase* es φ/2.

La amplitud de la onda resultante es 2*A cos(φ/2)*.

Video: Interferencia y principio de superposición: https://www.youtube.com/watch?v=6vACiTfOmWA

EFECTOS DE LOS LÍMITES

Cuando una onda encuentra un límite (punto en el que el medio varía), parte de la onda se refleja y parte se transmite y/o se absorbe, lo cual depende de la naturaleza del límite. Veremos dos tipos para el caso de una cuerda: **extremo totalmente fijo o libre** para moverse transversalmente, en ambos casos la onda se refleja casi totalmente, porque el sistema casi no pierde energía.



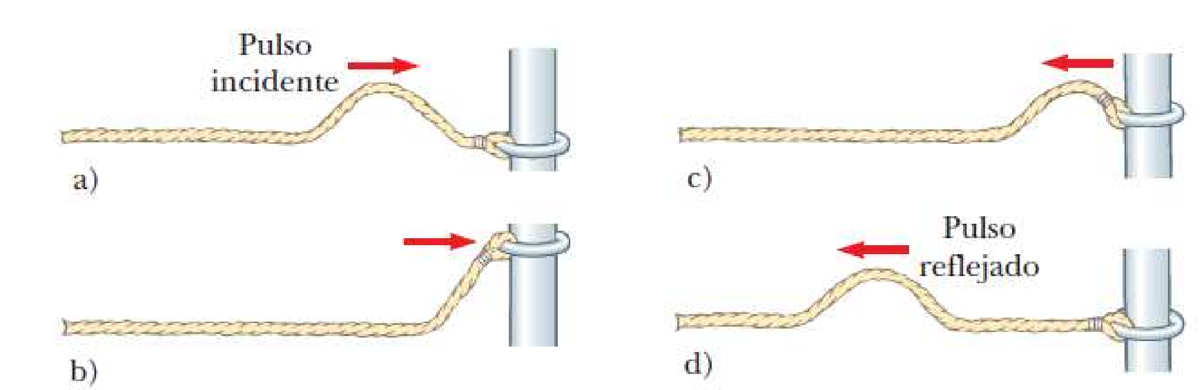
EXTREMO FIJO: REFLEXIÓN INVERTIDA

Pulso viaja en **cuerda rígidamente unida a soporte en un extremo:** experimenta una **reflexión;** se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en sentido opuesto y en forma ***invertida.***

EXTREMO LIBRE: REFLEXIÓN NO INVERTIDA

El pulso al final de la cuerda es libre de moverse verticalmente.

El **pulso se refleja, pero NO se invierte.**



Simulación PHET: https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_es.html

ONDAS ESTACIONARIAS

Interferencia de dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas en el mismo medio (dos ondas sinusoidales transversales con igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero con velocidades opuestas)

$y_1 = A \text{ sen } (kx - \omega t)$ $\quad\quad$ $y_2 = A \text{ sen } (kx + \omega t)$

Al sumar estas dos funciones obtenemos la función resultante y:

$y = y_1 + y_2 = A \text{ sen } (kx - \omega t) + A \text{ sen } (kx + \omega t)$

Usando la identidad trigonométrica:

$$\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\mathbf{y = (2A \text{ sen}(kx)) \cos(\omega t)}$$

la función es una **onda estacionaria.**

Onda estacionaria: patrón de oscilación *con un contorno estacionario que resulta de la superposición de dos ondas idénticas* que viajan en direcciones opuestas

La ecuación no contiene una función de *kx –ωt, no es* una onda progresiva.

Cada elemento oscila con MAS con la misma frecuencia angular ω.

La amplitud del MAS de un elemento (2*A sen(kx), depende de la ubicación x del elemento en el medio (efecto de modulación).*

Tiene un mínimo de cero cuando: *sen(kx) = 0, es decir, cuando kx= 0, π, 2π, 3π…*

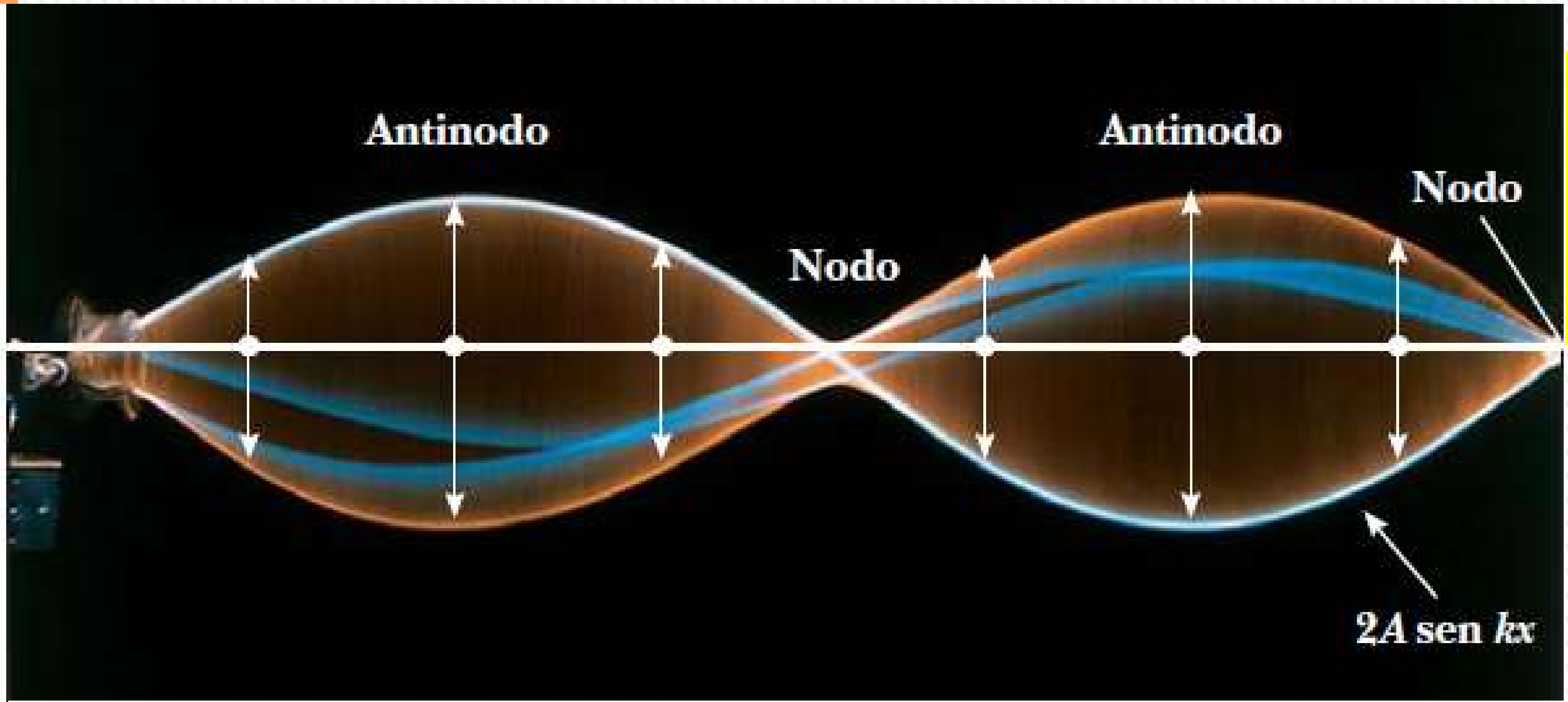
Como k= 2π/λ, estos valores de kx generan:

Estos puntos corresponden a los **nodos**.

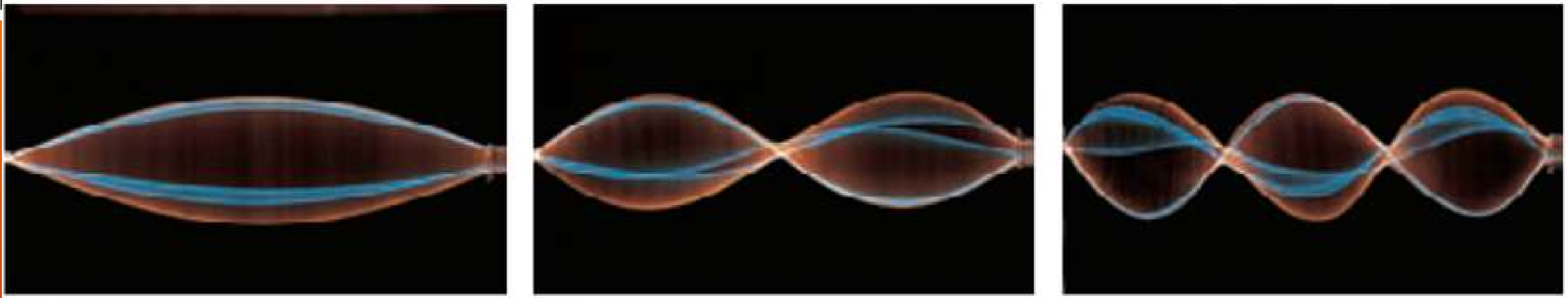
$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda \ldots = \frac{n\lambda}{2} \quad con \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ANIMACIÓN: https://www.walter-fendt.de/html5/phes/standingwavereflection_es.htm

ONDAS ESTACIONARIAS



Distancia entre:
antinodos adyacentes = λ/2
entre nodos adyacentes = λ/2.



Ondas estacionarias en una cuerda estirada: al aumentar la frecuencia de oscilación disminuye la longitud de onda…

Animación: https://www.educaplus.org/game/ondas-estacionarias

ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

Cuerda de longitud *L fija en ambos extremos:* se establecen ondas estacionarias por la superposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Existe una **condición frontera**: los extremos están fijos tienen desplazamiento cero (son nodos), por lo que la cuerda tiene un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados **modos normales (con una frecuencia característica) .**

Sólo se permiten ciertas frecuencias de oscilación: **cuantización.**

Solamente puede existir una onda estacionaria si su longitud de onda satisface:

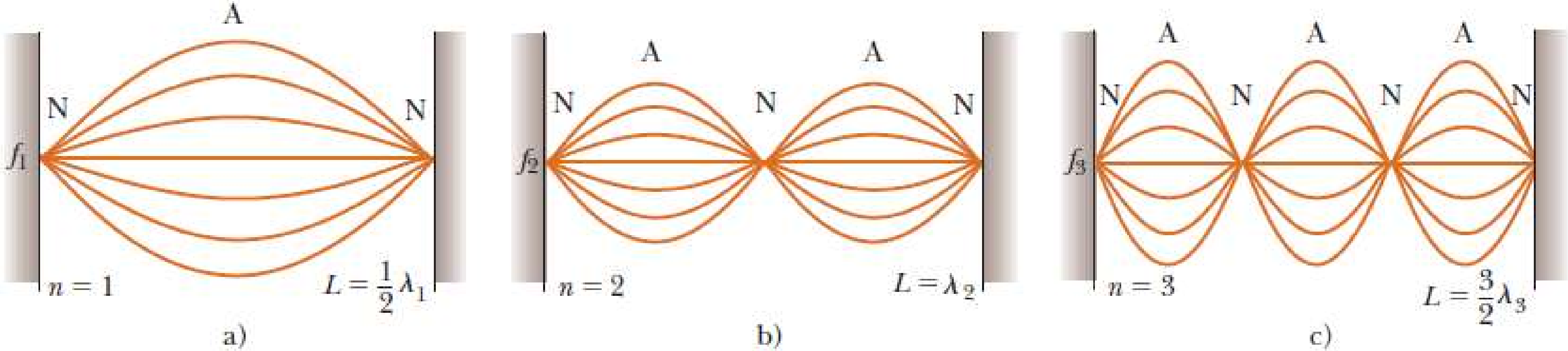
$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

Como los nodos están separados λ/2, si la longitud de la cuerda es L, se debe cumplir que:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)}$$

Pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda no es igual a uno de estos valores; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estacionaria con nodos y antinodos, y la onda total no puede ser estacionaria.

ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS



Modos de oscilación normales:

1er. modo normal: nodos en sus extremos y un antinodo en medio (hay 1 bucle): $\lambda_1 = 2L$.

2do.modo normal la cuerda vibra en dos bucles. $\lambda_2 = L$.

3er. modo normal $\lambda_3 = 2L/3$ *y la cuerda vibra en tres bucles.*

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3 \ldots$$

Frecuencias naturales (f_n) asociadas con los modos de oscilación ($f = v/\lambda$) *donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias.*

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L}n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Frecuencia fundamental

ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDA FIJA EN AMBOS EXTREMOS

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental: $f_n = n.f_1$ $\quad f_1 = \frac{v}{2L} \quad f_n = n\frac{v}{2L}$

Forman una **serie armónica, los modos normales se llaman armónicos.**

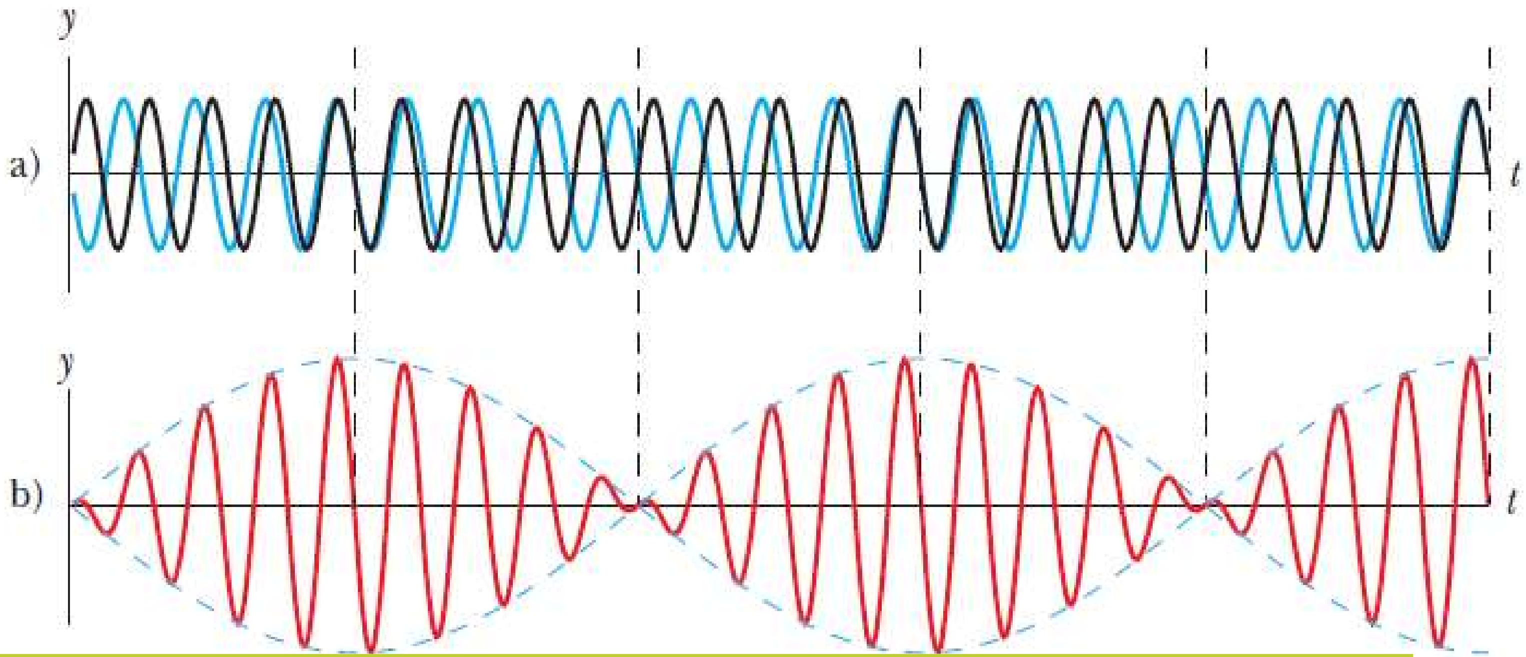
La frecuencia fundamental *f_1 es la frecuencia del primer armónico,*
$f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico
y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del n–ésimo armónico.

Estas frecuencias se conocen como **armónicos**, y la serie es una **serie armónica**. Y a f_2,f_3, etc.: **sobretonos**; f_2 es el 2do. armónico o 1er. sobretono, f_3 es el 3er. armónico o 2do. sobretono, y así sucesivamente

ANIMACIÓN:
https://www.educaplus.org/game/vibracion-de-una-cuerda-de-extremos-fijos

PULSACIONES O BATIDOS

Superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente distintas: **batido o pulsación: variación periódica en intensidad en un punto dado**
Es una interferencia temporal y no espacial.



a) Ondas individuales. b) Onda combinada.
La **onda envolvente (línea punteada) representa el batido** de los sonidos combinados.

Elijo un punto de modo que *kx =π/2*

$$y_1 = A\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) = A\cos(2\pi f_1 t) \quad y_2 = A\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right) = A\cos(2\pi f_2 t)$$

$$y = \left[2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t$$

Onda resultante: una frecuencia efectiva igual a la **frecuencia promedio** $(f_1 + f_2)/2$ *multiplicada por una **onda** envolvente:*

$$y_{envolvente} = 2A\cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t$$

ANIMACIÓN: https://www.walter-fendt.de/html5/phes/beats_es.htm

Como hay *dos máximos en cada periodo de la onda envolvente y como la amplitud* varía con la frecuencia como (f_1 - f_2) */2, el número de batidos por segundo, o la* **frecuencia de batido f_{batido}** ***es el doble de este valor***.

$$f_{batido} = |f_1 - f_2|$$

En resumen: La superposición de ondas de frecuencias f_1 y f_2 muy cercanas entre sí produce un fenómeno particular denominado **pulsación (o batido)**.

Para el sonido, nuestro sistema auditivo no es capaz de percibir separadamente las dos frecuencias presentes, sino que se percibe una frecuencia única promedio $(f_1 + f_2)/2$, pero que cambia en amplitud a una frecuencia de $f_2 - f_1$.

Ejemplo: si superponemos dos ondas senoidales de 300 Hz y 304 Hz, nuestro sistema auditivo percibirá un único sonido cuya frecuencia corresponde a una onda de 302 Hz y cuya amplitud varía con una frecuencia de 4 Hz (es decir, cuatro veces por segundo).

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.11

Un alambre de acero de 25,0 g de masa y 1,35 m de longitud se coloca en un bajo de tal modo que la distancia desde el peine hasta el puente es de 1,10 m.

a) Calcule la densidad lineal de la cuerda.

b) ¿Qué velocidad de onda sobre la cuerda producirá le frecuencia fundamental deseada de la cuerda de Mi, 41,2 Hz?

c) Calcule la tensión requerida para obtener la frecuencia apropiada.

d) Calcule la longitud de onda de la vibración de la cuerda.

e) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido producido en el aire? (Suponga que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s.)

a) La densidad de masa lineal vale: $\mu = \frac{m}{L'} = \frac{0{,}025\ kg}{1{,}35\ m} = 0{,}0185\ kg/m$

μ = 0,0185 kg/m = 18,5 g/m

b) $f_1 = 41{,}2$ Hz

La longitud efectiva vale: L= 1,10 m.

La longitud de onda para a frecuencia fundamental vale:

$\lambda_1 = 2L = 2(1{,}10) = 2{,}20$ m

Por tanto la velocidad de la onda debe valer:

$v = f.\lambda = f_1.\lambda_1 = (41{,}2)\ (2{,}20) = 90{,}64$ m/s

v = 90,6 m/s

c) Como $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ resulta $F = \mu v^2 = (0{,}0185)(90{,}64)^2 = 152{,}14\ N$

F = 152 N

EJEMPLO: Ejercicio 4.1.11

Un alambre de acero de 25,0 g de masa y 1,35 m de longitud se coloca en un bajo de tal modo que la distancia desde el peine hasta el puente es de 1,10 m.

a) Calcule la densidad lineal de la cuerda.

b) ¿Qué velocidad de onda sobre la cuerda producirá le frecuencia fundamental deseada de la cuerda de Mi, 41,2 Hz?

c) Calcule la tensión requerida para obtener la frecuencia apropiada.

d) Calcule la longitud de onda de la vibración de la cuerda.

e) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido producido en el aire? (Suponga que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s.)

d) La longitud de onda de la vibración de la cuerda vale $\lambda_1 = 2{,}20$ m **$\lambda_1 = 2{,}20$ m**

e) Al cambiar el medio, lo que se mantiene constante es la frecuencia, por tanto la longitud de onda en el aire valdrá:

$$\lambda_{aire} = \frac{v_{aire}}{f_1} = \frac{343}{41{,}2} = 8{,}3252\ m$$

$\lambda_{aire} = 8{,}33$ m