Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Actividad 8: Independencia lineal, generadores, bases

1. En los siguientes casos determinar si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ es linealmente independiente; en caso de que no lo sea escribir un vector de A como combinación lineal de los restantes:

   a) $A = \{(1, -3, 2), (2, -4, 1), (5, 3, 2), (1, -5, 5)\}$;
   b) $A = \{(1, 2, 1), (1, 0, -4), (4, 3, -1)\}$;
   c) $A = \{(2, 3, 4), (2, 1, -4), (12, 11, -4)\}$;
   d) $A = \{(1, -2, m), (3, 0, 2), (2, 1, -5)\}$ (discutiendo según el valor de m).

2. En los siguientes casos determinar si el conjunto $A \subseteq V$ es l.i.

   a) $V = \mathbb{C}[a, b]$, $A = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$.
   b) $V = \mathbb{C}[a, b]$, $A = \{f, g\}$ siendo $f(x) = |x - a|$ y $g(x) = |x - b|$.
   c) $V = \Bbbk[x]_2$, $A = \{x, x^2 + 1, 2x^2 + bx + a\}$ –discutir según a y b–.
   d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $A = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

3. Averiguar si los siguientes conjuntos A son generadores del espacio V:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$;
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 1, 3), (-2, 1, 1)\}$;
   c) $V = \Bbbk[x]_3$, $A = \{1, 1 + x^2, 1 - x + x^2 + x^3, 4 - x + 2x^2 + x^3\}$;

4. En los siguientes casos hallar un subconjunto linealmente independiente maximal del conjunto A,

   a) $A = \{(1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, 0, -1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$;
   b) $A = \{x^2, x^2 - x + 1, 2x - 2, 3\} \subseteq \Bbbk[x]$;

5. Probar que si $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l\} \subset V$ es linealmente independiente, entonces también lo es $\{x_1, \ldots, x_k\}$. (Observación que hicimos en clase, acá pedimos que escriban una prueba.)

6. Probar que un conjunto formado por dos vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro.

7. Sean $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $u, v, x \subseteq V$ tales que $\{u, v\}$ es linealmente independiente y $\{u, x\}$ es linealmente dependiente. En los siguientes casos, determinar si $A \subseteq V$ es linealmente independiente:

   a) $A = \{u\}$;
   b) $A = \{u, 5v\}$;
   c) $A = \{u - v, u + 3v\}$;
   d) $A = \{2u - v, -4u + 2v\}$;
   e) $A = \{u + v, x\}$;
   f) $A = \{u, u + x\}$;

g) $A = \{u + x, v + x\}$ (discutir según los posibles valores de x).

8. Si $A = \{M_1, M_2, M_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$ siendo $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$, hallar un subconjunto de A, que sea l.i. maximal.

9. Sea $V = \Bbbk[x]$. Determinar si $A = \{2, t + 1, t^2 + 3, (2t + 1)^2\}$ es linealmente independiente.

10. Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x - 2y - 2z = 0\}$. Describir un generador de V, con 2 elementos.

11. Determinar si el conjunto de vectores dado es una base para el espacio vectorial correspondiente.

    a) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{1 - x^2, x\}$.
    b) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3\}$.
    c) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\{-3x, 1 + x^2, x^2 - 5\}$.
    d) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$.
    e) En $\mathbb{R}_3[x]$, $\{3, x^3 - 4x + 6, x^2\}$.
    f) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ donde } abcd \neq 0 \right\}$.
    g) En $M_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \right\}$.
    h) En $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$, $\{(1, -1), (-3, 3)\}$.

12. Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

    a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.
    b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0\}$.
    c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x/2 = y/3 = z/4\}$.

13. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ se considera el conjunto:

$$B = \{1 - x, 1 + 2x, 2 + x^2, (1 + x)^2\}$$

    Hallar los subconjuntos de B que son lineamente independientes maximales en B. ¿Cúal es el subespacio generado por B?

14. Sea $A \subseteq C^1[a, b]$. Notamos $A' = \{f' \mid f \in A\} \subset C[a, b]$. Probar que $A \cup \{1\}$ es l.i. si y sólo si A' es l.i., donde 1 denota la función constante igual a 1.

15. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Dados n números reales diferentes $a_1 \ldots, a_n$ se definen:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x - a_2) \cdots (x - a_n) \\ f_2 &= (x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_n) \\ &\vdots \\ f_n &= (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1}) \end{aligned}$$

    Demostrar que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

16. Sean $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \rangle \neq 0$

a) Probar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Probar que existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ que cumplan $||w_i|| < \delta \quad i = 1, 2, 3$ se tiene que el conjunto

$$\{v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\}$$

sigue siendo una base de $\mathbb{R}^3$. Interpretar geométricamente.

17. Sea $S = \langle\{(1, 1, 0, 0), (i, 0, 1, 1), (i, i, 0, 0)\}\rangle \subset \mathbb{C}^4$

a) Determinar la dimensión de S considerando $\mathbb{C}^4$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

b) Determinar la dimensión de S considerando $\mathbb{C}^4$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

18. Mostrar que el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$ no tiene dimensión finita.

19. a) Probar que $\mathcal{B} = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathbb{R}[x]$.

b) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se considera: $X = \{(x_n^{(i)})_n : i \in \mathbb{N}\}$ donde para cada i

$$x_n^{(i)} = \begin{cases} 0 & n \neq i \\ 1 & n = i \end{cases}$$

Investigar si X es una base.

c) Considerando $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

(i) Probar que el conjunto $X = \{log(p) : p \text{ es primo}\}$ es l.i.

(ii) ¿La dimensión de este espacio vectorial es finita?

20. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los conjuntos $S = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = z, y = t\big\}$ y $T = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t = 0, z + y = x\big\}$.

a) Probar que S y T son subespacios de $\mathbb{R}^4$ y calcular sus dimensiones.

b) Encontrar una base de $S \cap T$ y una base de $S + T$.

21. Dado el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid c = 0, d = 2a \right\}$$

y

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Hallar una base y la dimensión de W_1.

b) Hallar una base y la dimensión de W_2.

c) Probar que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.

22. Sea $V = \{(x, y, z) \in k^3 / y + z = x\}$ y $T : V \to V$ definida por $T(x, y, z) = (y - x, x - y, 2y - 2x)$.

a) Hallar bases de $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

b) Sea $W = \{(x, y, z) \in k^3 / x = y = 0\}$. Probar que $\mathbb{k}^3 = V \oplus W$.