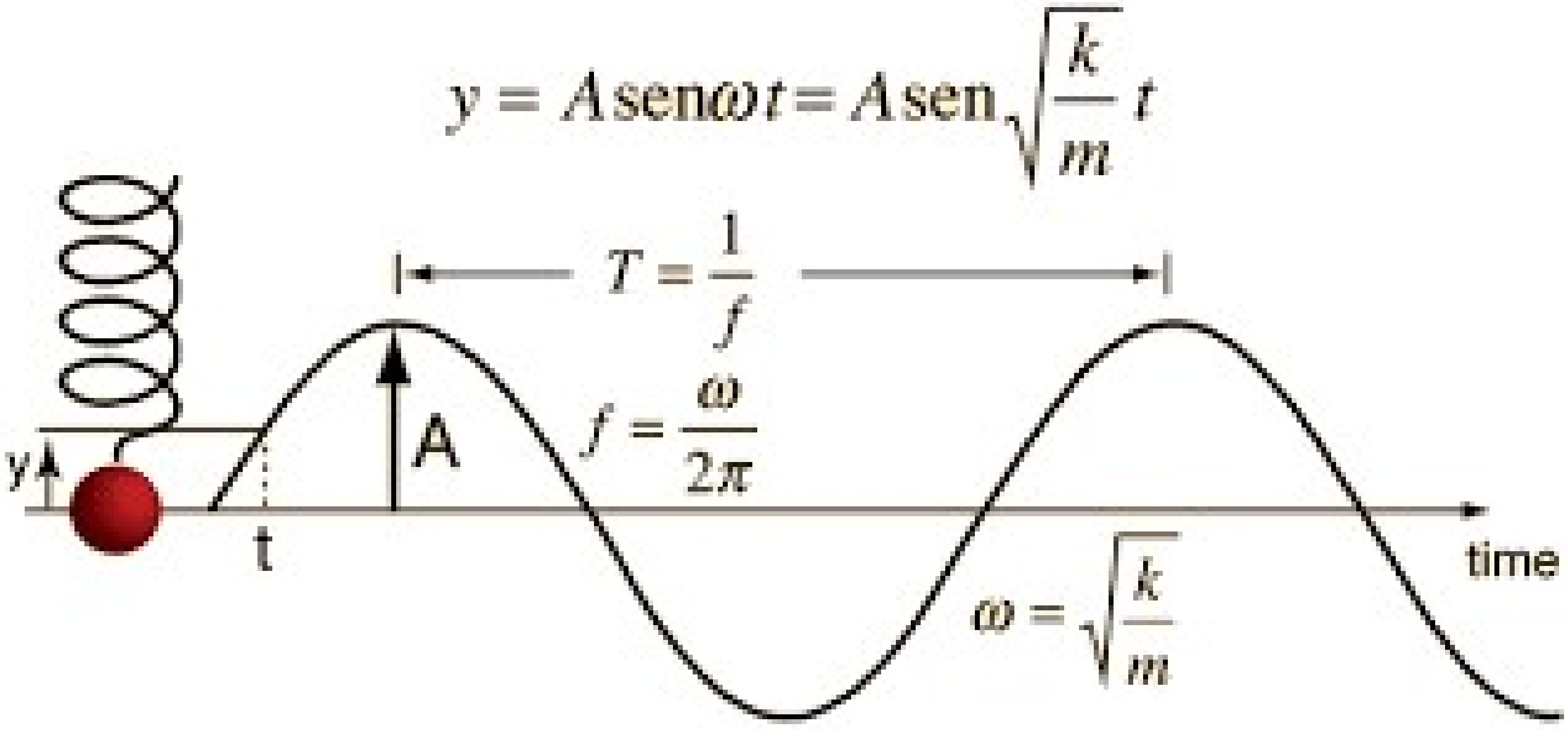
16-MOVIMIENTO PERIÓDICO

Movimiento Armónico Simple

Oscilaciones amortiguadas y forzadas



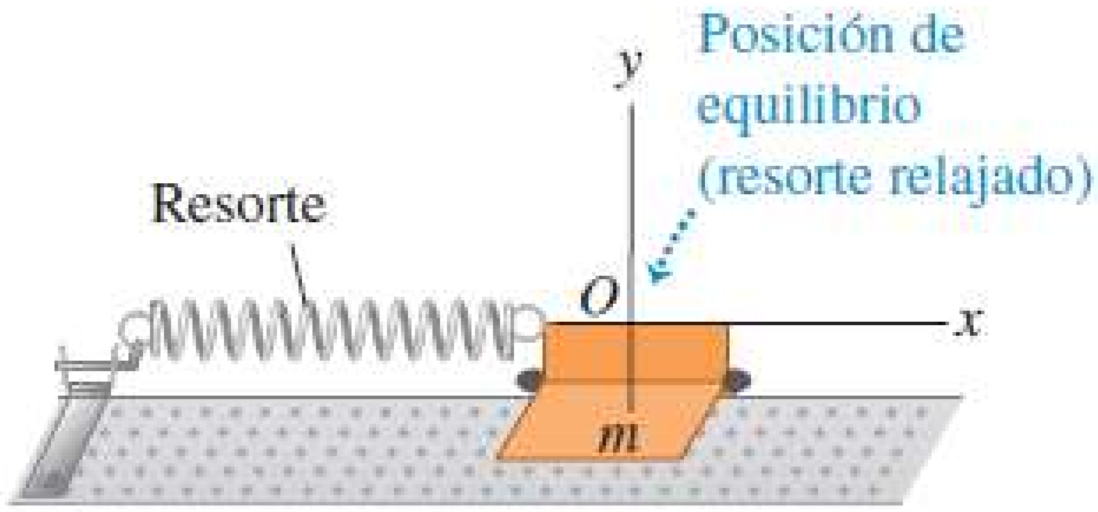
INTRODUCCIÓN- OSCILACIONES

Movimientos que se repiten una y otra vez: como el de un resorte o el de un péndulo oscilante de un reloj antiguo son ejemplos de **movimiento periódico u oscilación.**

Un cuerpo que tiene **un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable:** cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torque para hacerlo regresar al equilibrio; pero cuando llega ahí ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado… donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio.

Empezaremos analizando estos movimientos periódicos u oscilaciones por el caso más sencillo: un **MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE** que lo describe **sistema masa-resorte ideal**.

Descripción de la oscilación



x es el ***desplazamiento del cuerpo con respecto al equilibrio*** *y* el cambio de longitud del resorte.

Sistema más sencillo que puede tener movimiento periódico: **sistema masa-resorte ideal.**

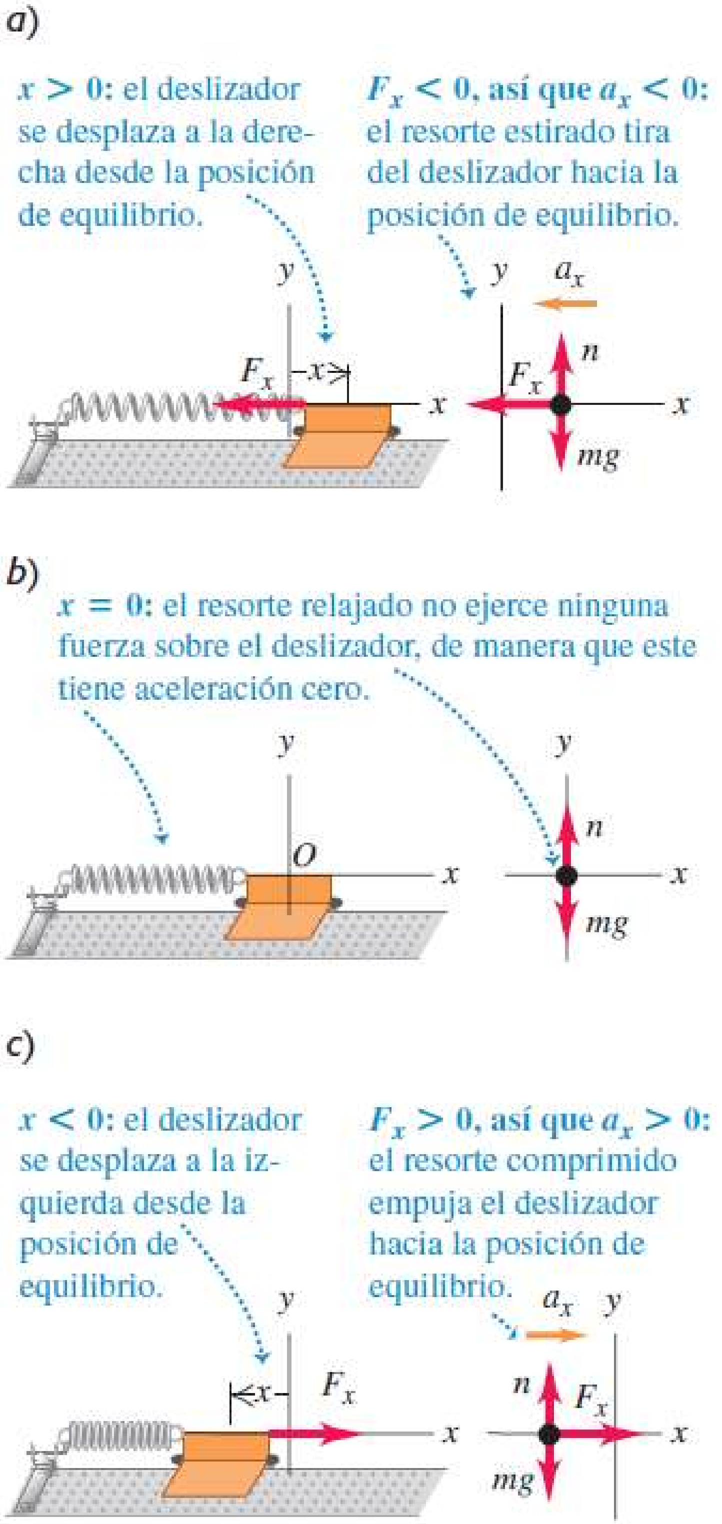
Cuerpo de masa *m sobre guía horizontal sin fricción que* solo puede desplazarse a lo largo del eje *x, conectado a un resorte ideal (perfectamente elástico y de masa despreciable)*

Extremo izquierdo del resorte fijo, y el derecho está unido al cuerpo.

La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

Fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x *y la componente x de la aceleración,* a_x*, está dada por :* $a_x = F_x/m$

Descripción de la oscilación



Origen del sistema de coordenadas *en la* posición de equilibrio (resorte ni estirado ni comprimido)

x es el ***desplazamiento del cuerpo con respecto al equilibrio*** *y* el cambio de longitud del resorte.

Fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x *y la componente x de la aceleración,* a_x*, está dada por*

$a_x = F_x/m.$

Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición.

Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución.**

Solo hay oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

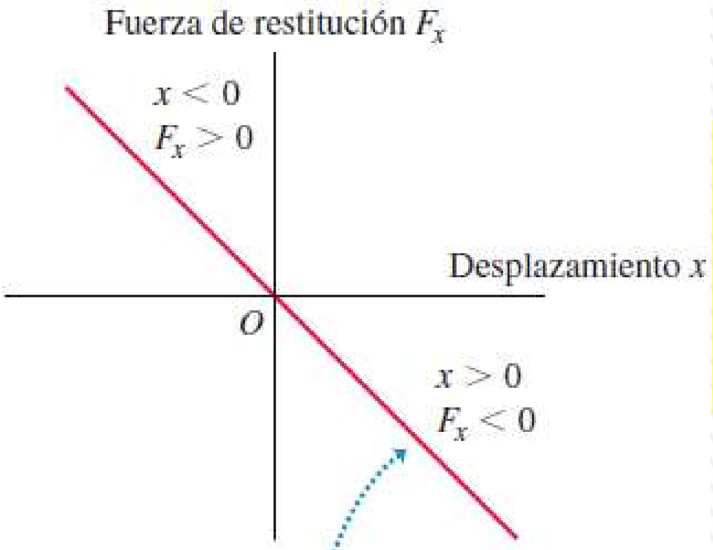
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La oscilación más sencilla: cuando la ***fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento x con respecto al equilibrio.***

Esto ocurre si el **resorte es ideal y obedece la ley de Hooke**. La constante de proporcionalidad entre F_x *y x es la constante de fuerza k.*

En ambos lados de la posición de equilibrio, ***F_x y x siempre tienen signos opuestos:*** ***$F_x = -kx$ (fuerza de restitución de un resorte ideal)***

La constante de fuerza *k siempre es positiva y tiene unidades* de N/m.



La fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal es directamente proporcional al desplazamiento (ley de Hooke, $F_x = -kx$): la gráfica de F_x contra x es una recta.

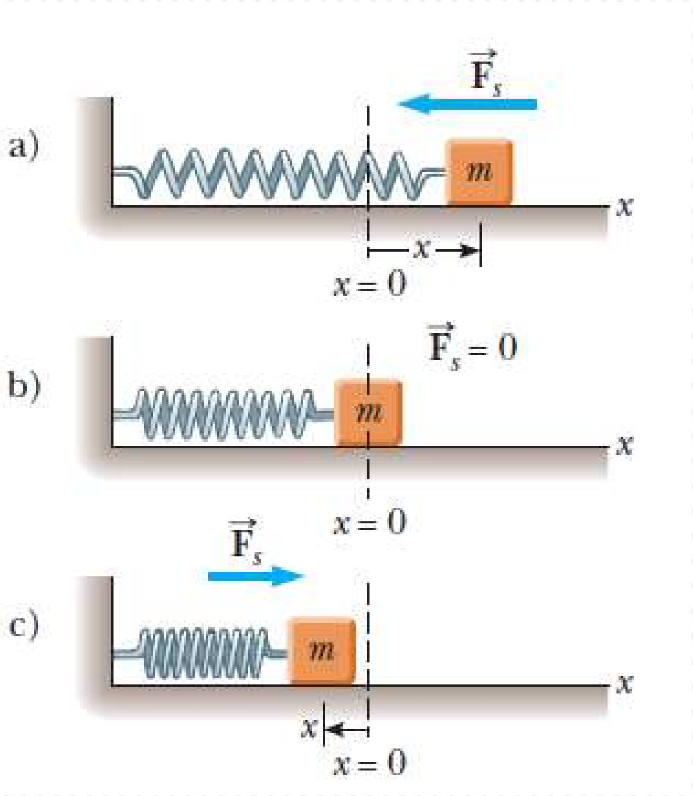
Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia como* ***MAS.***

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos.

Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico.**

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS



Para el sistema masa-resorte ideal, la ecuación de movimiento dada por la segunda ley de Newton según el eje x , teniendo en cuenta que la fuerza neta vale –kx: *m.a = F = -kx*

Y además $a=d^2x/dt^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución es efectivamente:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Donde A y *ϕ son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales, es general los valores de* $x(0) = x_0$ *y* $v(0) = v_0$.

También se puede usar como soluciones:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

Amplitud del movimiento A, *magnitud máxima del desplazamiento* con respecto al punto de equilibrio (valor máximo de *x* *)*.

Ciclo *o* ***vibración completa:*** *viaje completo* (de ida y vuelta), de *A a -A y de regreso a A, se recorre una distancia total de 4A. .*

Periodo ***T:*** *tiempo que se tarda en realizar un ciclo.*

$$f = \frac{1}{T} \quad ó \quad T = \frac{1}{f}$$

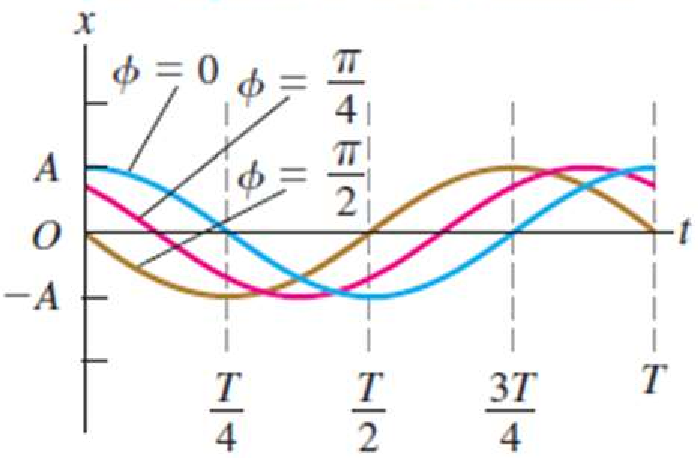
Frecuencia ***f :*** *número de ciclos en la unidad de tiempo* (hertz: Hz)

Frecuencia angular, ω: 2π veces la frecuencia: ω = 2π*f* *(rad/s).*

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Constate de fase **ϕ ángulo de fase**, indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando *t = 0.*

Estas tres curvas muestran el MAS con periodo T y amplitud A iguales, pero ángulos de fase ϕ distintos.



Constante ϕ ángulo de fase, *x_0 posición en t = 0*

Sustituyo t = 0 y *x = x_0 se tiene: x_0= A cos* ϕ.

Si ϕ = 0, entonces *x_0 = A cos 0 = A; por lo tanto, la partícula parte desde el máximo desplazamiento positivo*

si ϕ = π, entonces *x_0 = A cos π = -A;*

por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo máximo;*

si ϕ = π/2, entonces x_0 = A cos(π/2) = 0.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

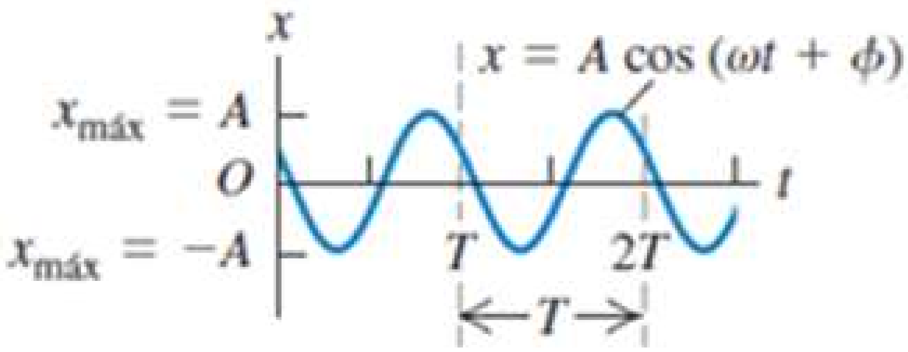
Derivando obtenemos:

(cos u)' = -sen(u)* u'

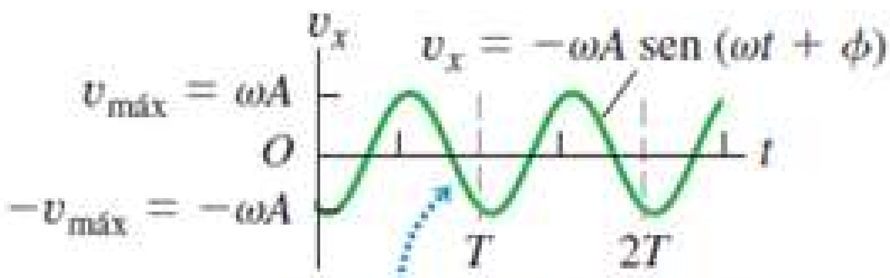
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \Phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \Phi$$

a) Desplazamiento x en función del tiempo t

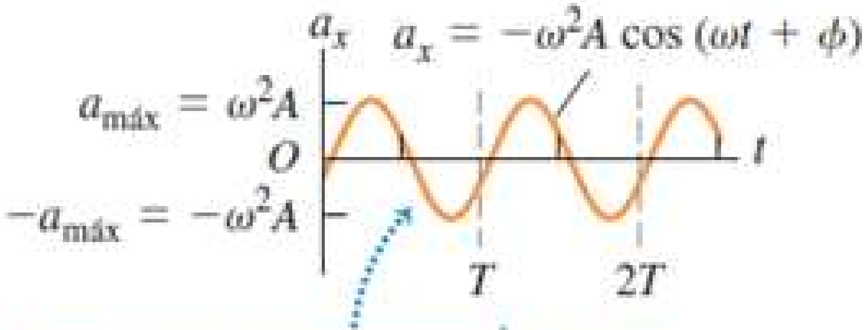


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x-t se desplaza por $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica $x-t$.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza $\frac{1}{4}$ de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y $\frac{1}{2}$ ciclo con respecto a la gráfica x-t.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 *y* v_0 *del cuerpo oscilante, podemos* determinar la amplitud *A y el ángulo de fase* ϕ*.*

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\Phi$$

$$v(t=0) = v_0 = -A\omega\sin\Phi$$

$$\sin\Phi = -\frac{v_0}{A\omega} \quad \text{y} \quad \cos\Phi = \frac{x_0}{A}$$

$$\boxed{\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

Dividiendo miembro a miembro: $\dfrac{\sin\Phi}{\cos\Phi} = \dfrac{-\frac{v_0}{A\omega}}{\frac{x_0}{A}} = -\dfrac{v_0}{\omega x_0}$

$$A\sin\Phi = -\frac{v_0}{\omega} \quad \text{y} \quad A\cos\Phi = x_0$$

Elevando al cuadrado cada miembro de estas dos igualdades y sumando a miembro a miembro:

$$A^2 sin^2\Phi + A^2 cos^2\Phi = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$A^2(sin^2\Phi + cos^2\Phi) = A^2 = \left(-\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + (x_0)^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 *como una velocidad* inicial v_0 *distinta de cero, la amplitud A no es igual al desplazamiento inicial.*

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

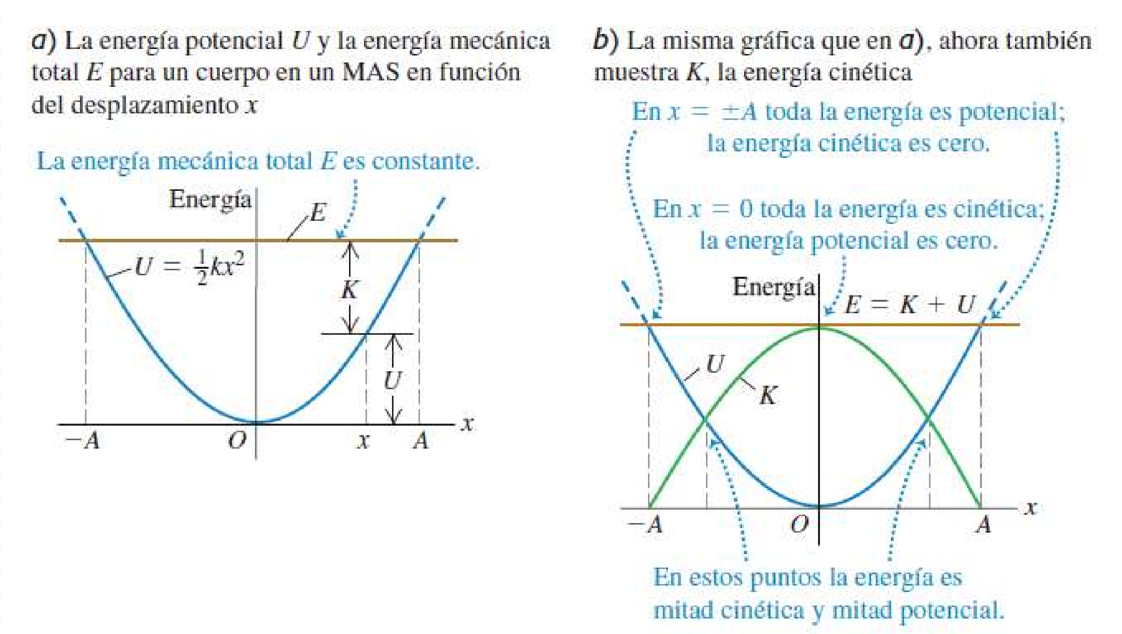
Fuerza del resorte única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo.
La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que **se *conserva la* energía mecánica total del sistema**.
<u>También supondremos que la masa del resorte es</u> <u>despreciable</u>.
Como no hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

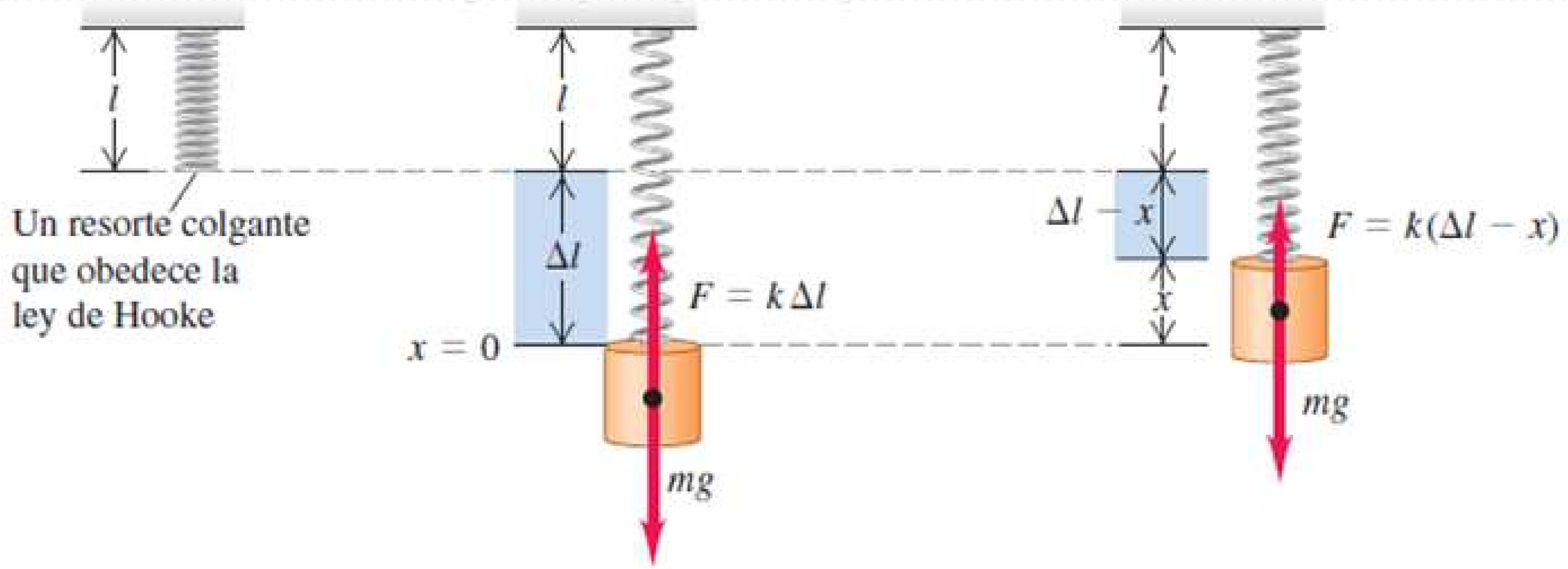
$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$



MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE VERTICAL



Si colgamos un resorte ideal con constante de fuerza *k y suspendemos* un cuerpo de masa *m, las oscilaciones ahora serán verticales: sigue desarrollando un* MAS.

E*l cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio.* En tal posición, el resorte se estira una distancia Δl *tal que la* fuerza vertical hacia arriba $k\,\Delta l$ *del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:* $mg = k\,\Delta l$

El MAS vertical no difiere en esencia del horizontal: el único cambio real es que la posición de equilibrio $x = 0$ *ya no corresponde* al punto donde el resorte no está estirado.