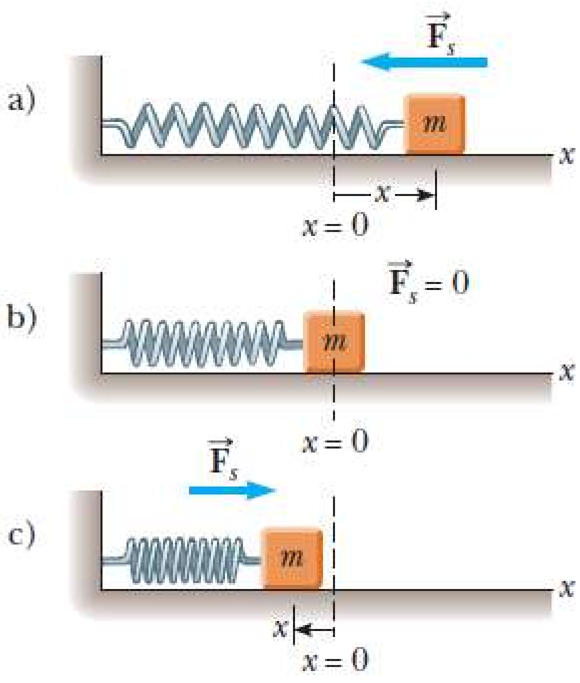
# REPASO DE CLASE ANTERIOR




**Oscilación:** movimiento repetitivo alrededor de un punto de equilibrio estable debido a la acción de una fuerza o torque de restitución.

Caso más sencillo: **movimiento armónico simple**: sistema **masa resorte ideal**.

m.a= F = -kx

*Cuando la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, la oscilación se denomina* ***movimiento armónico simple (MAS).***

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$$

**Amplitud del movimiento A,** *magnitud máxima del desplazamiento* con respecto al punto de equilibrio (valor máximo de *x ).*

***Ciclo*** *o* ***vibración completa:*** *viaje completo* (de ida y vuelta), de *A a -A y de regreso a A, se recorre una distancia total de 4A. .*

**Periodo *T:*** *tiempo que tarda un ciclo.*

**Frecuencia *f* : ,** *número de ciclos en la unidad de tiempo* (hertz: Hz)

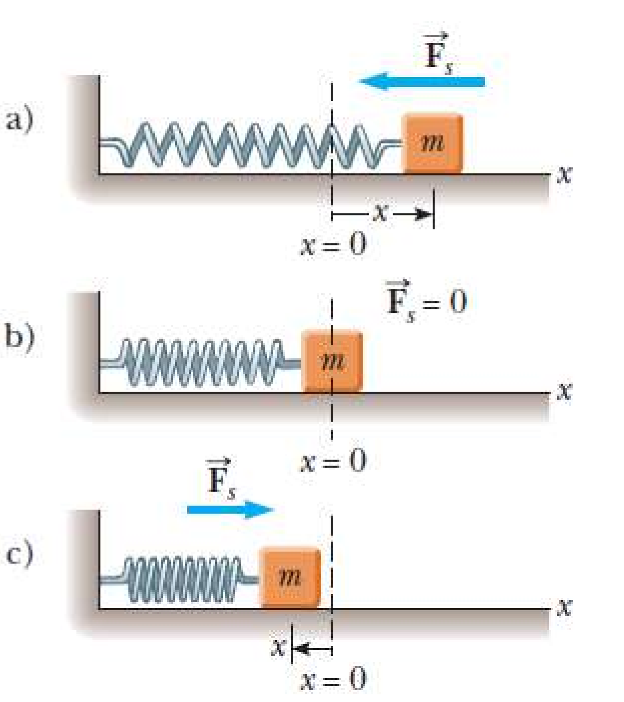
**Frecuencia angular, ω:** 2π veces la frecuencia: ω = 2π*f (rad/s).*

*Constate de fase* **ϕ ángulo de fase,** indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando *t = 0.*

$$f = \frac{1}{T} \quad ó \quad T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

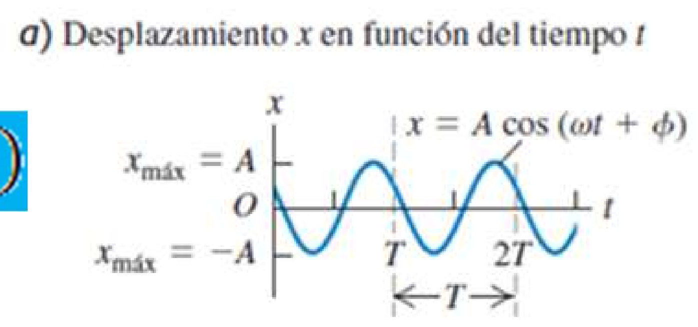
# REPASO DE CLASE ANTERIOR



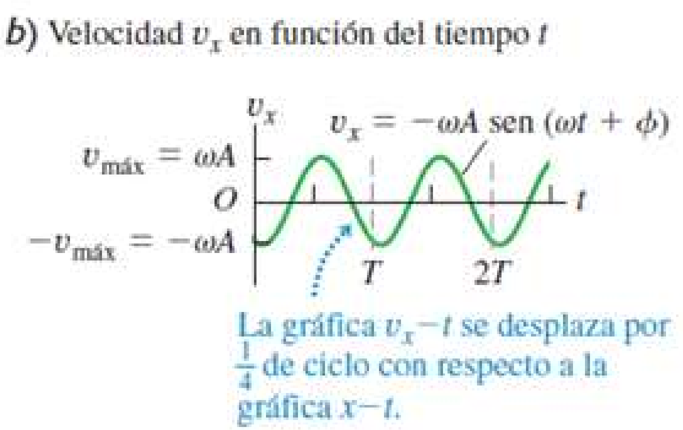

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$

A y ϕ se determinan por las condiciones iniciales: $x_0$ y $v_0$.

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

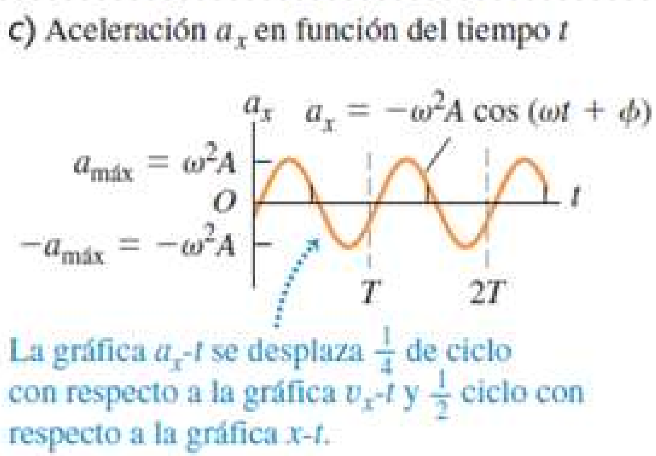



$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$$




$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \Phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega$$

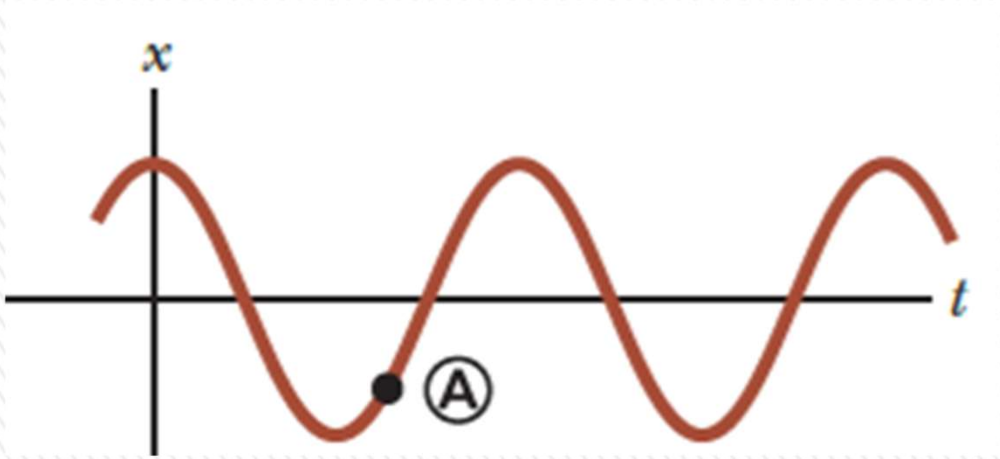



Energía de un oscilador armónico:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

# QUICK QUIZ - CUESTIONARIO RÁPIDO




Considere una representacion gráfica de movimiento armónico simple (MAS), como se describe matemáticamente en la ecuación $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.
Cuando el objeto esta en el punto A de la gráfica,
¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad?

**a)** La posición y velocidad son positivas.

**b)** La posición y velocidad son negativas.

**c)** La posición es positiva y su velocidad es cero.

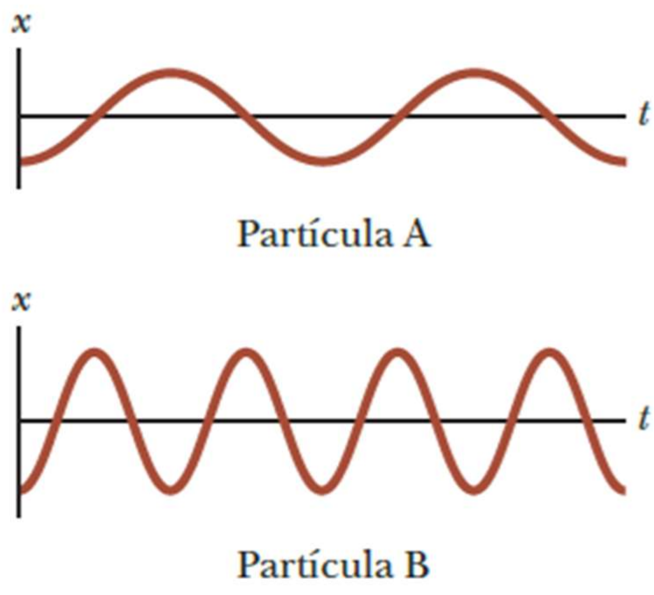
**d)** La posición es negativa y su velocidad es cero.

**e)** La posición es positiva y su velocidad es negativa.

**f)** La posición es negativa y su velocidad es positiva.

# QUICK QUIZ - CUESTIONARIO RÁPIDO

La figura muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos partículas. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple de la partícula B es,




a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A,

**b)** de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A,

**c)** de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A o

**d)** de menor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A.

# QUICK QUIZ - CUESTIONARIO RÁPIDO

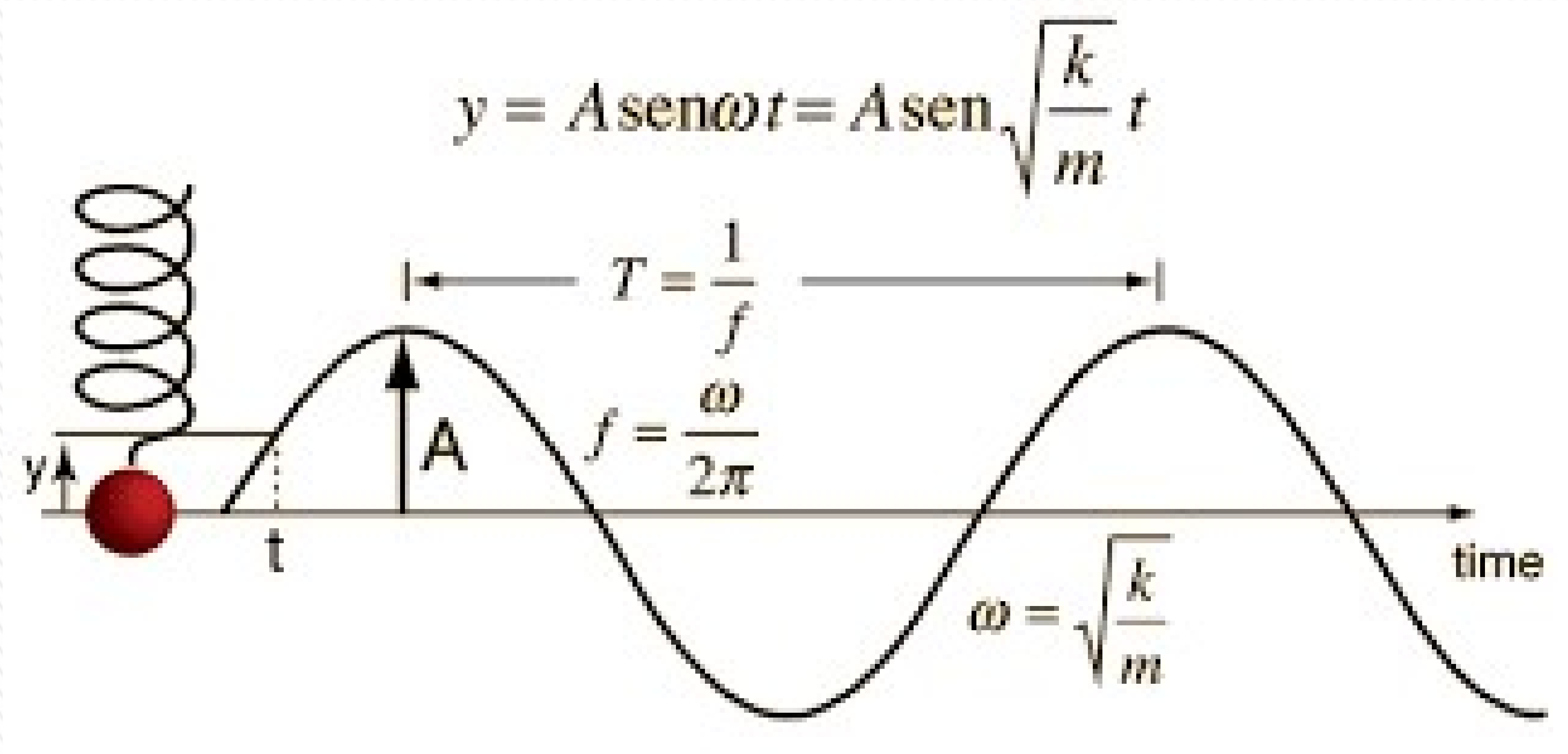
Un objeto de masa *m* cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como *T*. El objeto de masa *m* se retira y se sustituye con un objeto de masa 2*m*. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento?

a) 2T b) $\sqrt{2}\,T$ c) T d) $T/\sqrt{2}$ e) T/2

# 17-MOVIMIENTO PERIÓDICO

## Movimiento Armónico Simple

## Oscilaciones amortiguadas y forzadas



# EJEMPLO: Ejercicio 4.1.1

Un resorte se estira 5,0 cm cuando se le cuelga una masa de 0,300 kg.
**a)** ¿Cuál es la constante del resorte?
**b)** Si la masa se estira 10,0 cm de la posición anterior, ¿cuál es la amplitud y el periodo de oscilación?

**a)** Al suspenderse la masa *m*, estira el resorte una cantidad $\Delta L$ de mdo que la fuerza elástica del resorte equilibra el peso de la masa:

$$mg = k\Delta L$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{(0{,}300)(9{,}8)}{0{,}050} = 58{,}8\ N/m$$

**k= 59 N/m**

**b)** Supongo que la masa se estira y se suelta con velocidad inicial nula, por lo que: $x(0) = x_0 = 0{,}100$ m; $v(0) = v_0 = 0$.

$$\Phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

Entonces: $\Phi = 0$ y $A = x_0 = 0{,}100$ m

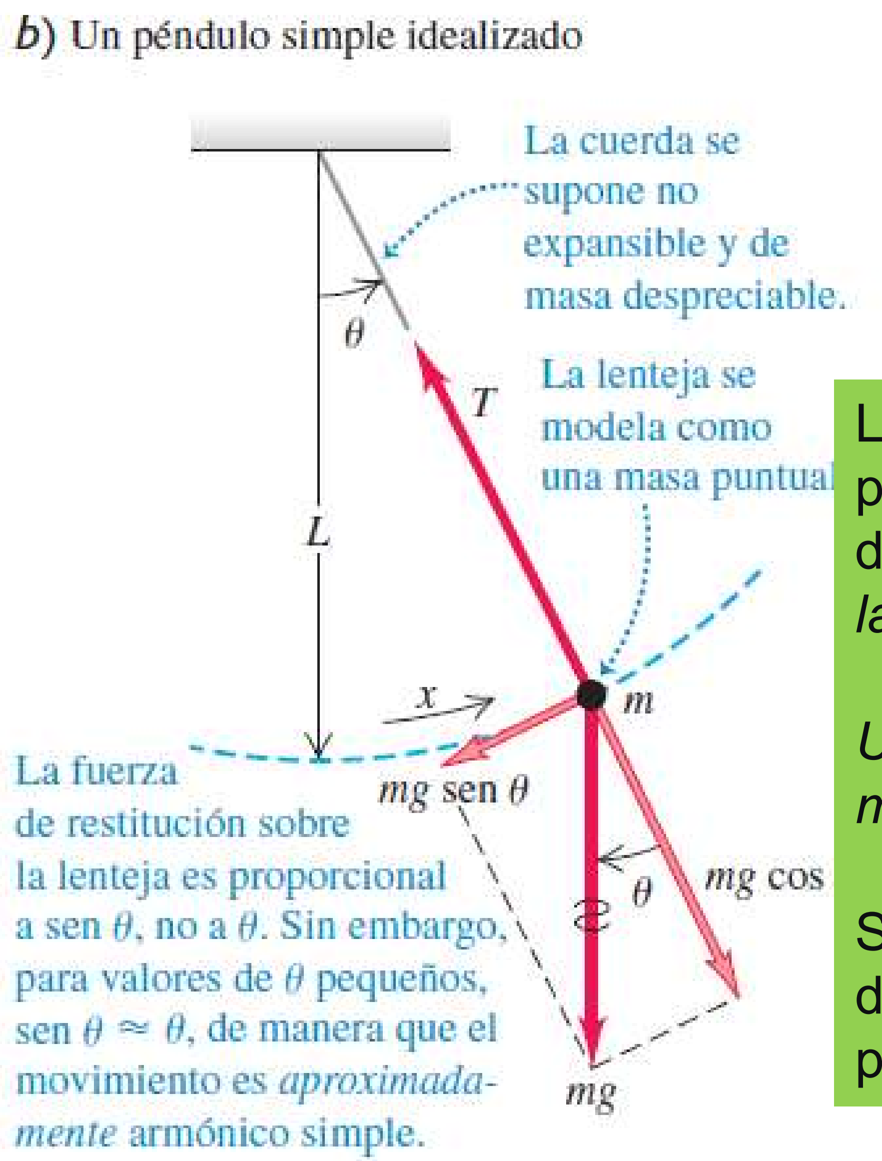
**A= 0.10 m**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{58{,}8}{0{,}300}} = 14\ rad/s \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{14} = 0{,}4488\ s$$

**T= 0.45 s**

$$x(t) = A\cos(\omega t + \Phi) = (0{,}10\ m)\cos\big((14\ rad/s)t\big)$$

# PÉNDULO SIMPLE




**Modelo idealizado: masa puntual suspendida de una cuerda no extensible y de masa despreciable**.

Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio vertical inferior, oscilará alrededor de dicha posición.

La trayectoria de la partícula puntual (llamada pesa o lenteja) no es una recta, sino un arco de un círculo de radio *L igual a la longitud de la* cuerda.

*Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco.*

Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debería ser directamente proporcional a *x, o bien a θ (porque x = Lθ).*

La **fuerza de restitución $F_\theta$ *es la componente* tangencial de la fuerza neta**:

$$F_\theta = -mg\sin\theta \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

# PÉNDULO SIMPLE

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión *T solo actúa para hacer que la* masa puntual describa un arco.

La fuerza de restitución es proporcional *no a θ sino* a senθ, así que **el movimiento *no es armónico simple.***

*Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es casi igual a θ en radianes.*

*Por ejemplo, si θ = 0,1 rad* (unos 6°), sen θ = 0,0998, una diferencia de solo 0,2%.

Con esta aproximación, la ecuación se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\theta \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -g\theta$$

Pero: $x=\theta L$

$$\frac{d^2(\theta L)}{dt^2} = -g\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Que es un MAS con ω $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

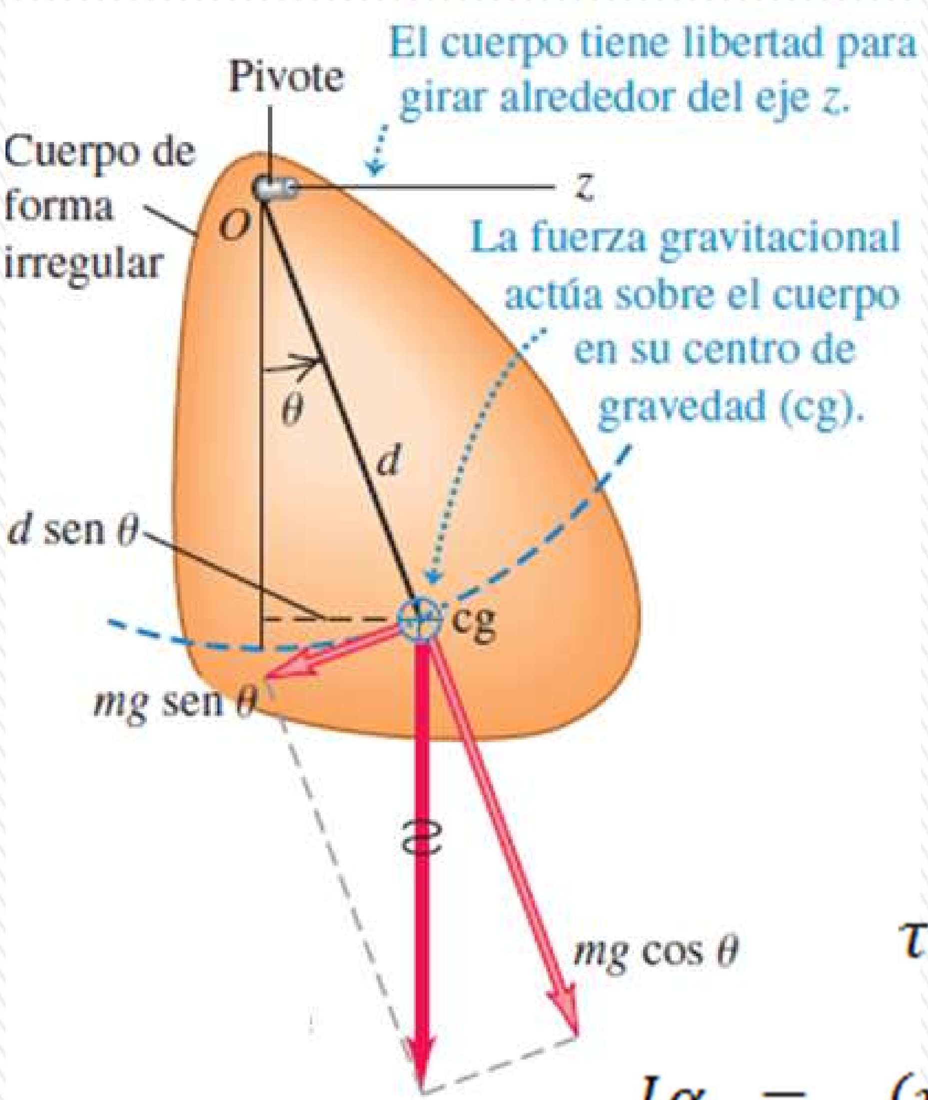
$$\theta(t) = \Theta\cos(\omega t + \Phi)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

**Expresiones para un péndulo ideal y amplitudes pequeñas.**

(errores sen $\theta \approx \theta$ : 5º-0,24%, 10º -0,5 %, 15º-1,14%)

# PÉNDULO FÍSICO




**Cualquier péndulo *real que usa un cuerpo de tamaño finito.***

Cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto *O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente* abajo del pivote; en la posición que se muestra en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema.

La distancia de *O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del* eje de rotación a través de *O es I y la masa total es m.*

$$\tau_z = -(mg)d\sin\theta \qquad \sum \tau_z = I\alpha_z$$

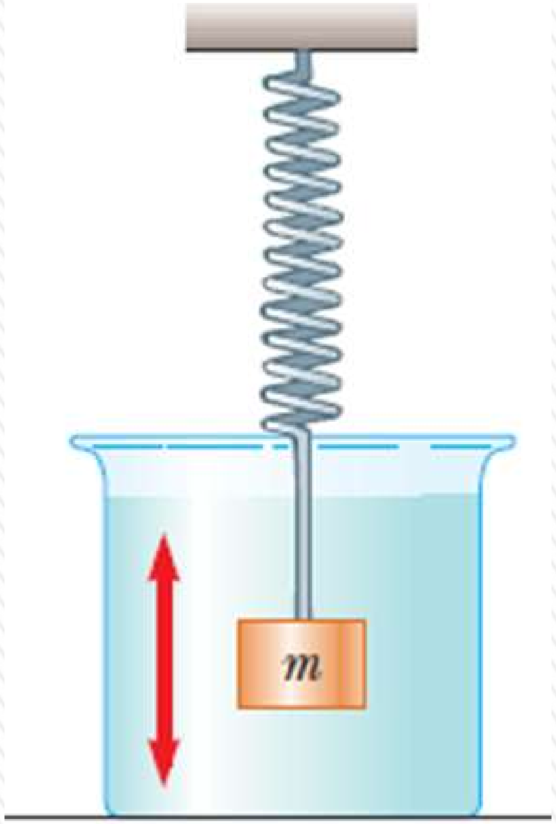
Si θ es pequeño: sen θ ≅ θ

$$I\alpha_z = -(mgd)\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

# OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Los sistemas reales siempre tienen fuerzas disipativas, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada.




La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipativas se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente **oscilación amortiguada.**

**Caso más sencillo: oscilador armónico simple, con fuerza de amortiguamiento por fricción proporcional a la *velocidad del cuerpo* oscilante.**

Sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, *donde* $v_x = dx/dt$ *es la velocidad y b es la* ***constante de amortiguación*** *que describe la intensidad* de la fuerza amortiguadora.

El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *neta que actúa sobre el cuerpo :* $\Sigma F_x = -kx - bv_x$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Ecuación diferencial en *x, de segundo orden.*

# OSCILACIONES AMORTIGUADAS

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x$$

Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña $b < \sqrt{4km}$

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

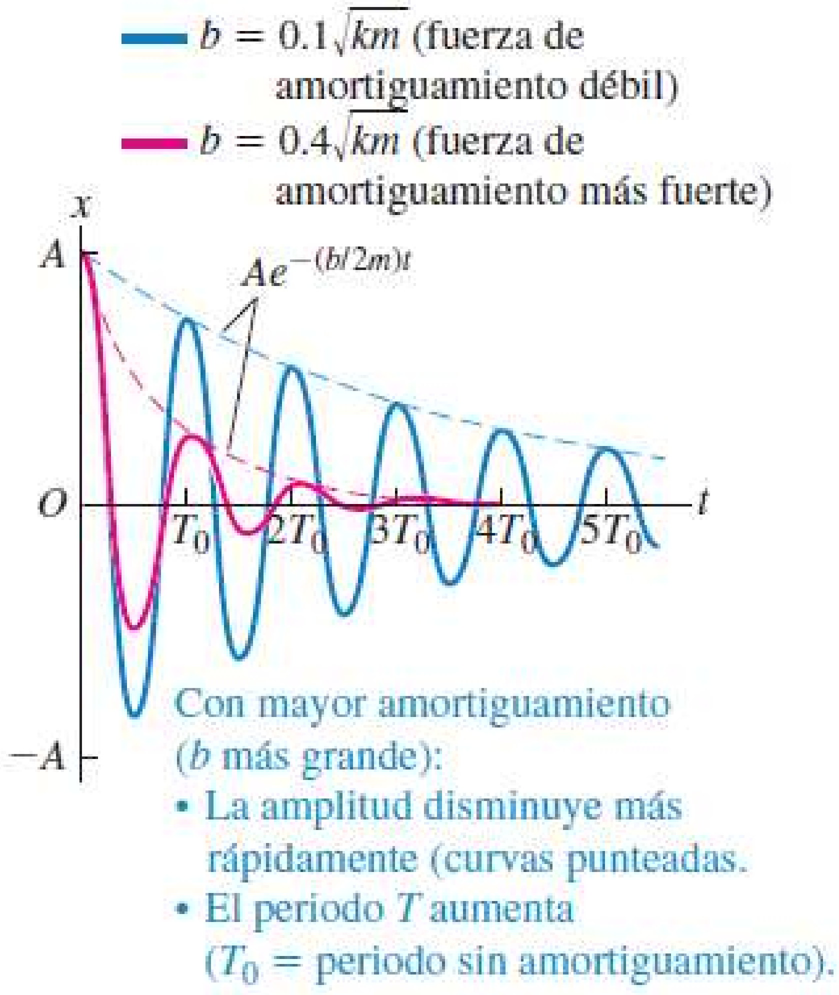
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

La *condición se* llama **subamortiguamiento.**

**El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente**

**Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa.**

Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**



# OSCILACIONES AMORTIGUADAS

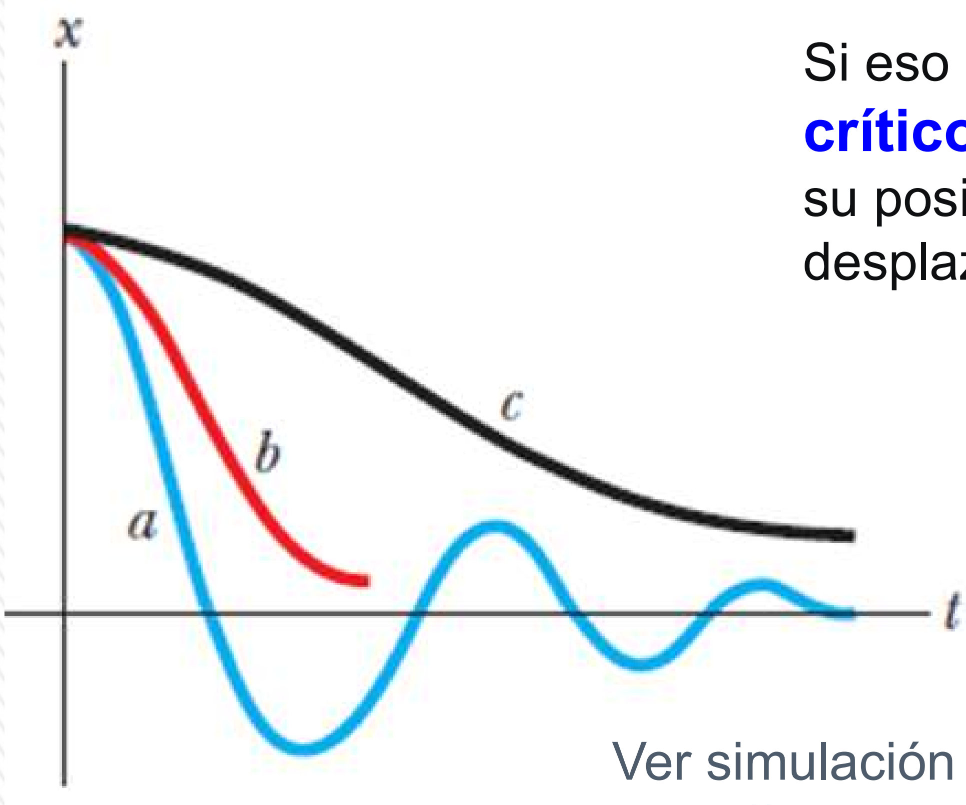
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega' t + \Phi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

1) La amplitud $Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ *no es constante, sino que disminuye con* el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-bt/2m}$.

Cuanto mayor sea el valor de *b, la amplitud disminuirá más rápidamente.*

2) La frecuencia angular ω' ya no es igual $\omega = \sqrt{k/m}$ sino un poco menor, y se vuelve cero si *b es tan grande que* $b = \sqrt{4km}$




Si eso se cumple, tenemos un **amortiguamiento crítico.** El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta (gráfica.en rojo).

Si *b es mayor que la condición crítica se denomina* ***sobreamortiguamiento.*** No hay oscilación, el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico (gráfica color negro).

Ver simulación de GEOGEBRA: [https://www.geogebra.org/m/sqAAUqqy](https://www.geogebra.org/m/sqAAUqqy)

# OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Un oscilador amortiguado deja de moverse tarde o temprano, aunque se puede mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódicamente, con periodo y frecuencia definidos, esta fuerza se denomina **fuerza impulsora.**

## Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos a un oscilador armónico amortiguado una fuerza impulsora que varíe periódicamente con **frecuencia angular $\omega_d$**, se obtiene una **oscilación forzada** **o** ***impulsada***, diferente al movimiento que se da con una **frecuencia angular natural $\omega'$**. *Entonces la masa oscila a* la frecuencia angular $\omega_d$,

Si hacemos que el oscilador vibre con una frecuencia angular $\omega_d$ por ejemplo con una fuerza impulsora *sinusoidal:* $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$ casi *igual a la frecuencia angular* $\omega'$, la amplitud de la oscilación resultante es mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes.

*Al variar la frecuencia* $\omega_d$ *de la fuerza impulsora, la amplitud* de la oscilación forzada resultante varía.

Cuando hay poco amortiguamiento, *la amplitud tiene un pico* marcado conforme $\omega_d$ se acerca a $\omega'$.

Si aumenta el amortiguamiento (*b mayor), el pico* se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

# Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

La ecuación de movimiento es ahora:

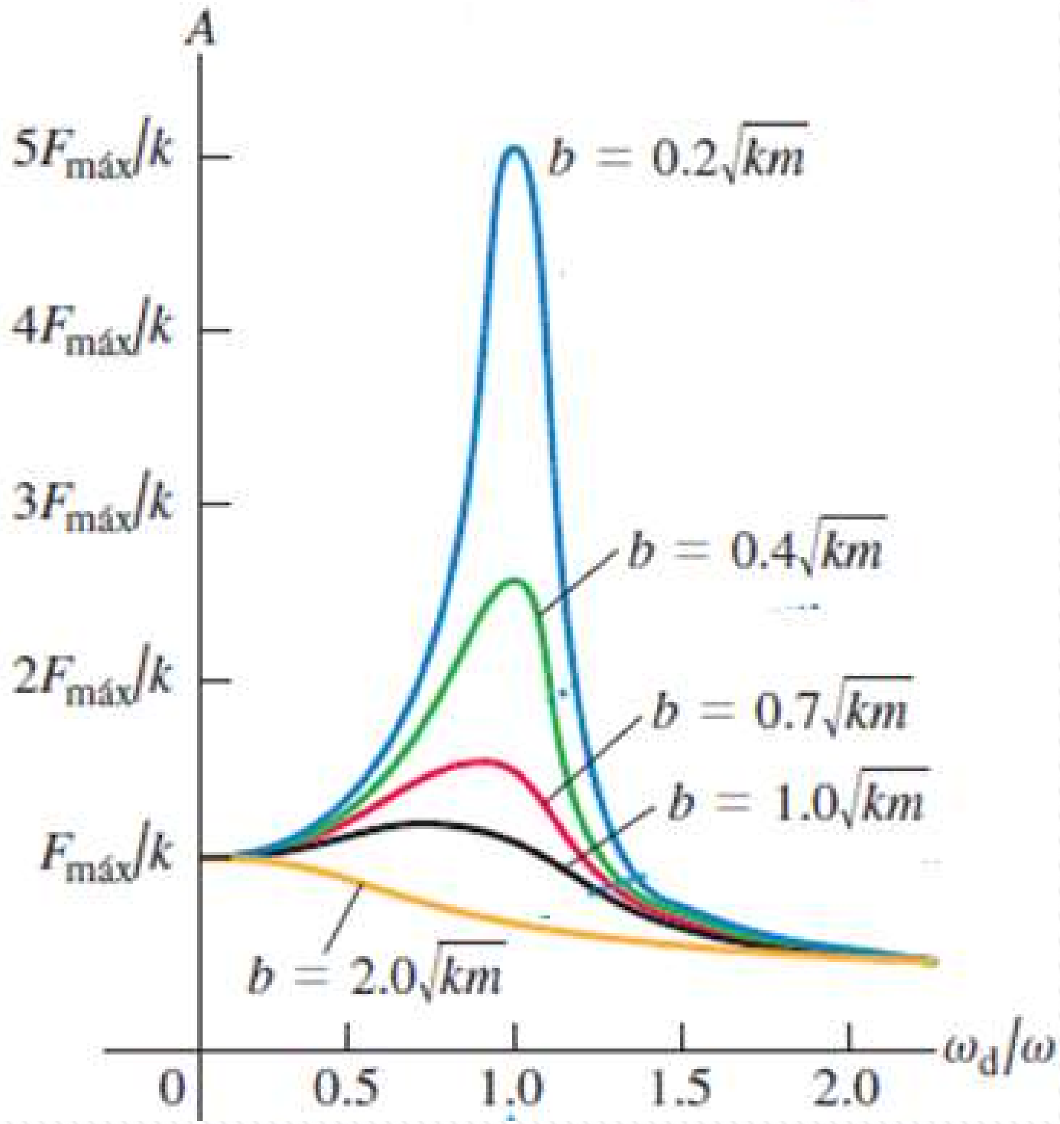
$$F_{max} \cos \omega_d t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La amplitud *A de la oscilación* forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora sinusoidal:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + (b\omega_d)^2}}$$

Si $k = m\omega_d^2$ el primer término bajo el radical es cero y A tiene un máximo cerca de

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m}}$$




La altura de la curva en este punto es proporcional a 1/b; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico.

# RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia.**

Ejemplos de resonancia; aumentar las oscilaciones de un niño en una hamaca, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural de la hamaca.
La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos (circuitos de sintonización).

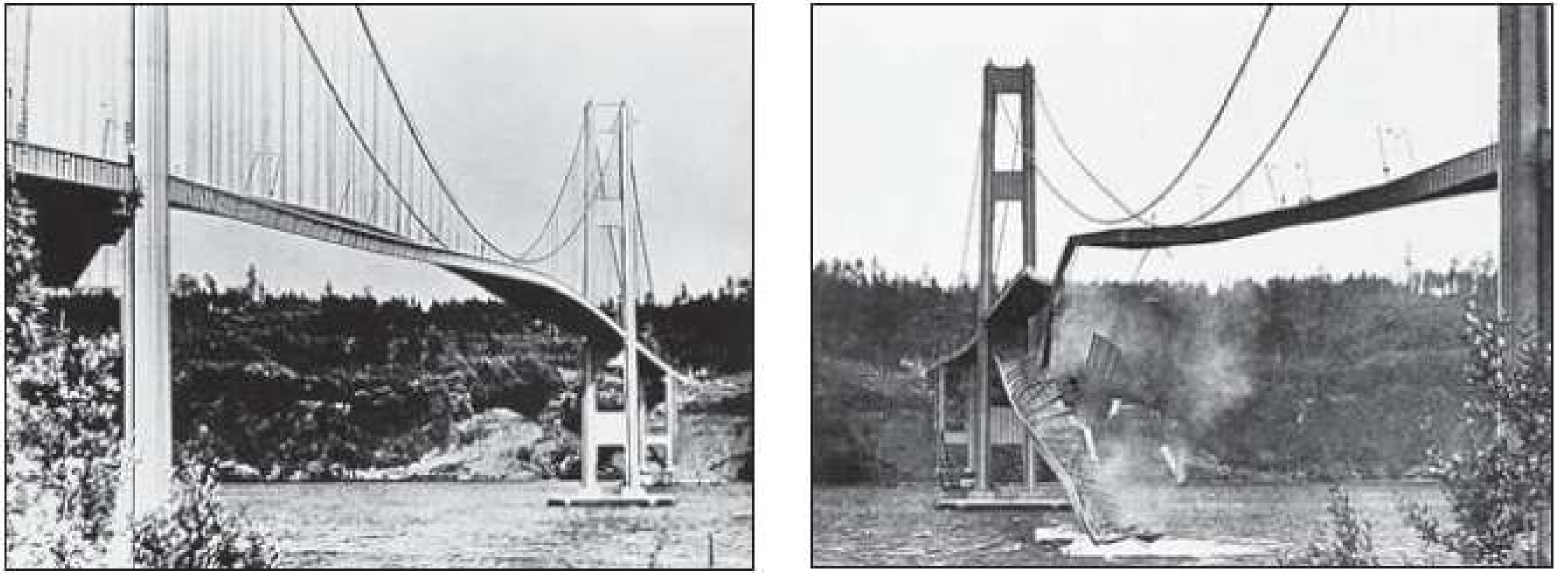
La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva.
Un escuadrón de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para resquebrajar el puente.
Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente.
Las vibraciones de los motores de un avión pueden tener la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas, provocar grandes oscilaciones e incluso hacer que se desprendan las alas.

# RESONANCIA Y SUS CONSECUENCIAS

En 1940, el puente Tacoma Narrows, de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el “aleteo” del viento a través del camino (piense en el “aleteo” de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones del puente resultantes hicieron que a final de cuentas colapsara.

https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag

https://www.youtube.com/watch?v=yQ5ucPK2IEI



a) b)

**Figura 15.24** a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (*UPI/Bettmann Newsphotos*)

# 17-MOVIMIENTO ONDULATORIO

Las olas combinan propiedades de las ondas transversales y longitudinales. Con el equilibrio y el ritmo adecuados, un surfista puede capturar una ola y dar un paseo en ella.

# INTRODUCCIÓN: ONDAS

**Ondas: perturbación del estado de equilibrio de un sistema, la cual se *propaga* de una región del sistema a otra, transportando energía.**

**Ondas mecánicas:** las que viajan por un material (*medio)*. No todas las ondas son mecánicas.

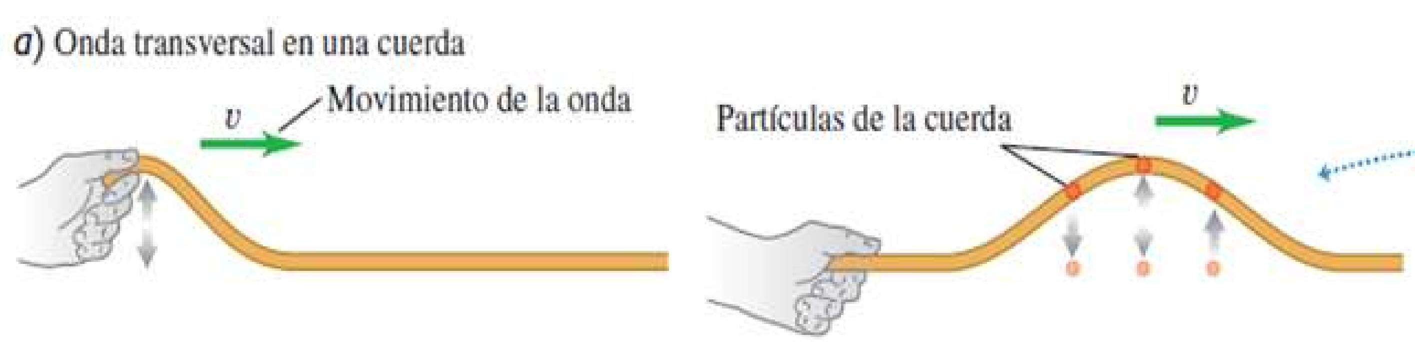
**Ondas *electromagnéticas*** (luz, ondas de radio, radiaciones infrarroja y ultravioleta, rayos X) se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde *no* hay un medio material.

## Características de las ondas:

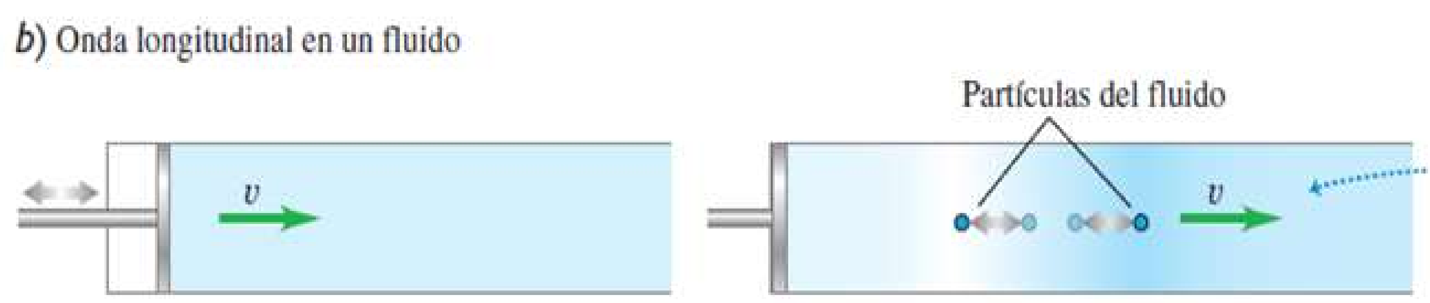
- La perturbación se *propaga por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de propagación* o rapidez de la onda o de fase ($v$),
- El medio mismo no viaja en el espacio. *Ejemplo de la "ola" en un estadio.*
- *Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento, pero no materia, de una región a otra.*

Veremos ecuaciones básicas que describen las ondas, en especial las ***ondas sinusoidales*** donde el patrón de la onda es una función repetitiva seno o coseno. Ejemplo más sencillo: ondas periódicas que viajan por una cuerda estirada.

# TIPOS DE ONDAS MECÁNICAS

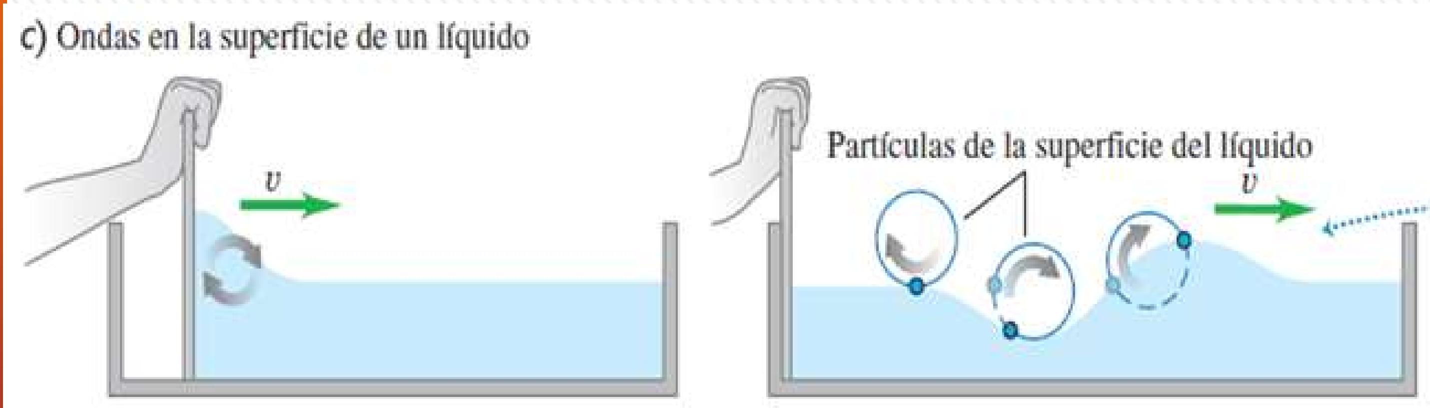



**Medio: cuerda tensa.** Los desplazamientos del medio son perpendiculares o *transversales a* la dirección en que la onda viaja por el medio, se trata de una **onda transversal**.



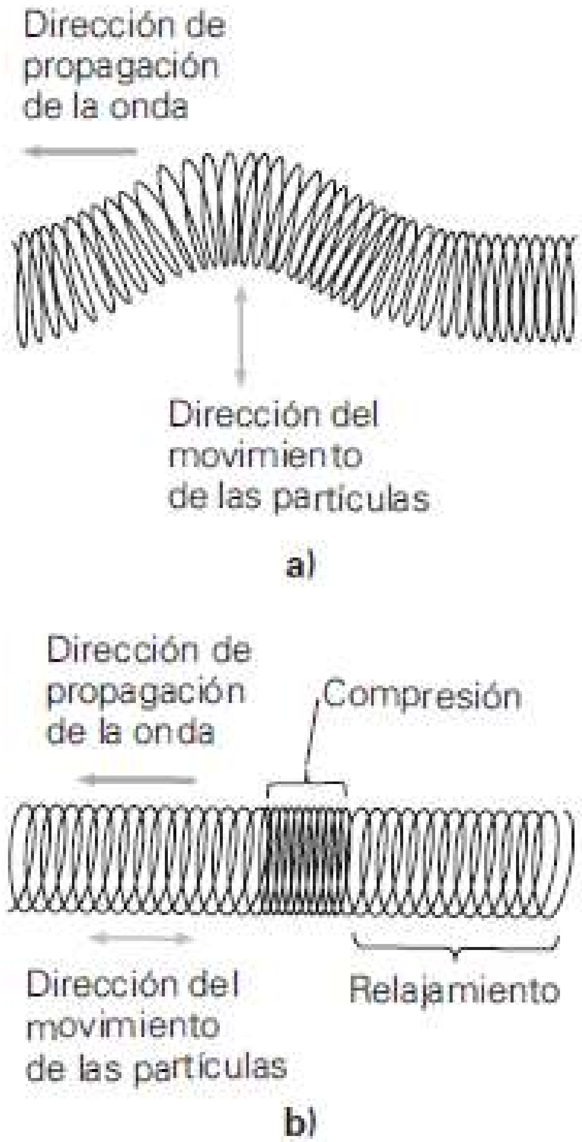

***Medio: líquido o gas en un tubo con pared rígida* en un extremo derecho y un pistón en el otro**.

Los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la *misma dirección en que viaja la onda,* se trata de una **onda longitudinal**.




***Medio: líquido en un canal****, agua en una zanja.* Desplazamientos del agua tienen componentes ***tanto longitudinales como transversales.***

# Tipos de ondas mecánicas

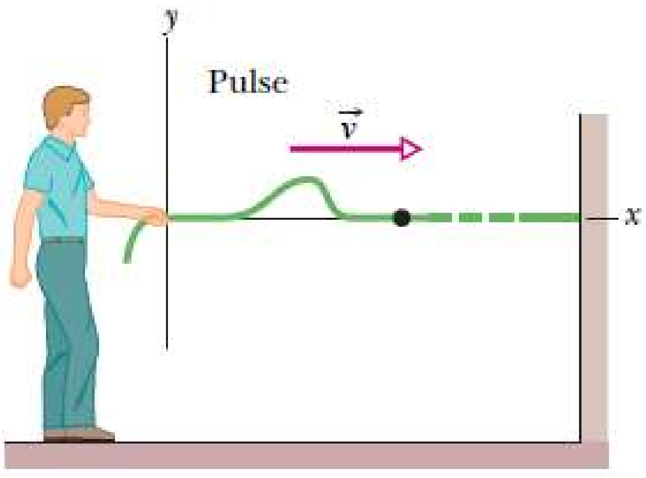



"Hacer la ola" en un estadio deportivo es un ejemplo de onda mecánica: la perturbación se propaga en la multitud, pero no transporta materia (ninguno de los espectadores se mueve de un asiento a otro).

Onda longitudinal y transversal en un resorte

# Tipos de ondas mecánicas

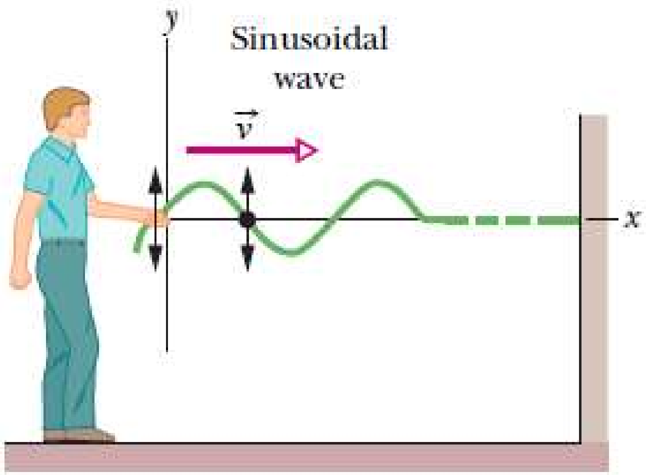
La caída de una piedra en un estanque o cuando se agita brevemente una cuerda por un extremo, son un solo **pulso ondulatorio** que viaja a partir de la perturbación.
También se presentan de forma continua (**trenes de ondas**) u **ondas progresivas** y otras además en forma regular: **ondas periódicas.**



(a)

La función que representa una onda (para el caso unidimensional) se expresa como una función ***y(x,t),*** que por ejemplo puede representar la posición transversal de una cuerda que depende de dos variables: la posición *x* de cualquier elemento de la cuerda y en cualquier instante de tiempo *t.*

**Función de onda unidimensional: y(x,t)**



(b)

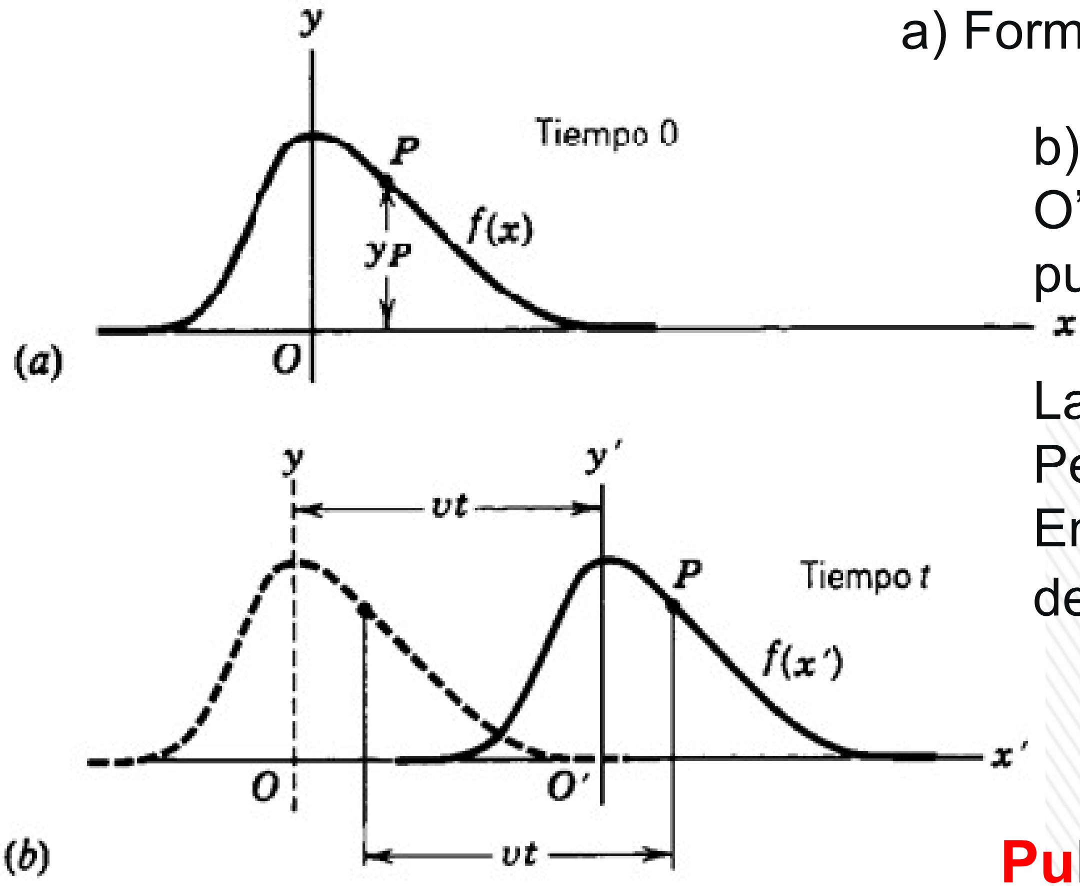
Se puede deducir la ecuación de onda plana unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\delta x^2}$$

Se prueba que cualquier función del tipo *f(x± vt)* es solución de la ecuación de onda

*Si t es fijo* (como en el caso de tomar una instantánea del pulso), la función de onda *y(x), a veces* llamada **forma de onda, define una curva que representa la forma geométrica del pulso** en dicho tiempo.

# Movimiento de un pulso de onda




a) Forma del pulso de onda: *y(x,0)= f(x)*.

b) Pulso en un instante posterior.
O' marco de referencia que viaja con el pulso, hacia la derecha con velocidad *v*.

La forma se describe como *f(x')*.
Pero: *x'= x-vt*.
Entonces en un tiempo *t*, el pulso se describe como: *y(x,t)= f(x')= f(x-vt)*.

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

**Pulso que viaja hacia la derecha**

**Pulso que viaja hacia la izquierda:** $$y(x,t) = f(x + vt)$$

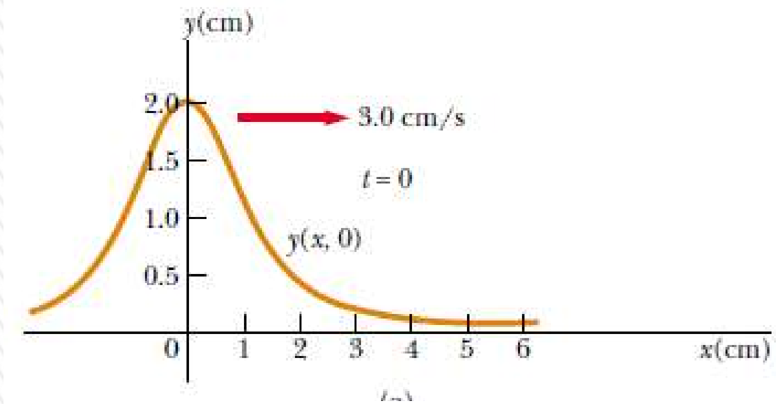
# Ejemplo: movimiento de un pulso de onda

Un pulso de onda dado por la expresión: $$y(x,t) = \frac{2}{(x-3{,}0t)^2+1}$$

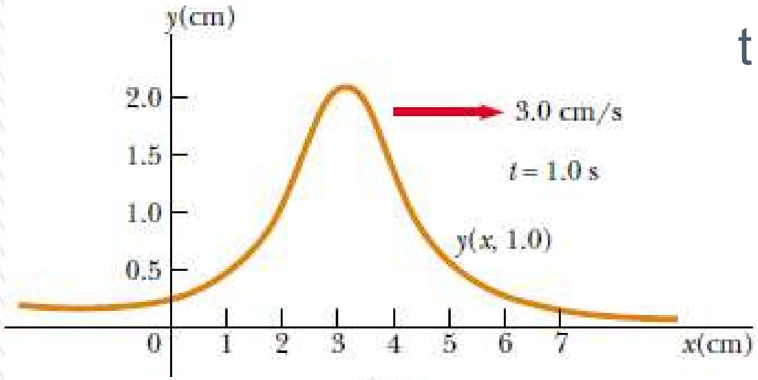
($x$, $y$ en cm y $t$ es s)

Representar el pulso, para los instantes t =0,0 s, t = 1,0 s y t = 2,0 s

Veremos que esta función representa un pulso que se desplaza hacia la izquierda con una rapidez de 3,0 cm/s



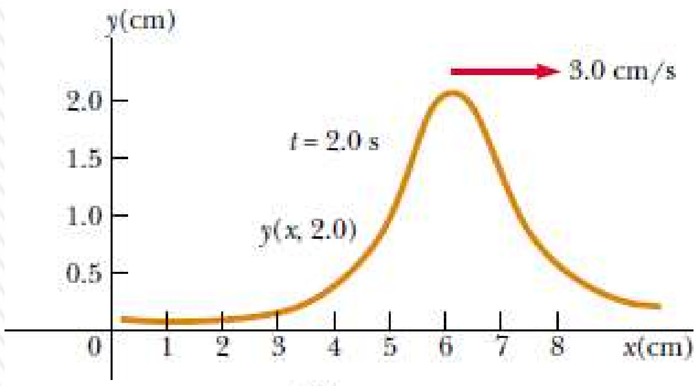

t = 0 $$y(x,0) = \frac{2}{x^2+1}$$




(b)

t = 1,0 s $$y(x,1.0) = \frac{2}{(x-3{,}0)^2+1} = \frac{2}{x^2-6{,}0x+10}$$

t = 2,0 s $$y(x,2.0) = \frac{2}{(x-6{,}0)^2+1} = \frac{2}{x^2-12{,}0x+37}$$




(c)