

Práctica 1 Gráficos y Errores

Objetivos

Realizar gráficos en escalas lineal y logarítmica (log-log). Ajustes de rectas por mínimos cuadrados en escala lineal y en escala logarítmica. Estimación de la pendiente y punto de corte y sus errores correspondientes. Propagación de errores.

Parte A: Gráficos lineales y logarítmicos

La tercera Ley de Kepler relaciona el período orbital y el semieje mayor de la órbita elíptica de un planeta alrededor de una estrella de masa M (suponiendo que la masa del planeta es despreciable frente a la de la estrella) según la Ecuación 1.

$$a^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2 \quad (1)$$

En esta parte utilizaremos datos de los planetas del Sistema Solar para comprobar la tercera Ley de Kepler y utilizarla para inferir la masa del Sol. Los datos necesarios se suministran en la Tabla 1, que incluye el semieje mayor a , período orbital T y tipo de los 8 planetas y principales planetas enanos del Sistema Solar.

Tabla 1: Planetas del Sistema Solar

Nombre	a (10^6 Km)	T (años)	Tipo
Mercurio	57.91	0.2408	Planeta
Venus	108.2	0.6152	Planeta
Tierra	149.6	1.0	Planeta
Marte	227.94	1.8808	Planeta
Júpiter	778.33	11.862	Planeta
Saturno	1429.4	29.4571	Planeta
Urano	2870.99	84.0087	Planeta
Neptuno	4504.3	164.7867	Planeta
Plutón	5913.52	247.9056	Planeta Enano
Ceres	413.787	4.599	Planeta Enano
Eris	10123.148	556.9978	Planeta Enano

1. Usando la librería matplotlib de Python, haz un gráfico de semieje mayor como función del período, en escala lineal. ¿Qué esperas obtener?

En el gráfico anterior resultará difícil distinguir la tendencia que siguen los planetas interiores (hasta Marte). Esto se debe a que la escala en cada eje debe cubrir un rango de valores muy grande para poder representar todos los puntos a la vez. Por ejemplo, para representar los semiejes la escala debe ir desde 50 hasta 10.000 millones de km, cubriendo casi 3 órdenes de magnitud. Para poder ver el comportamiento de los planetas interiores, deberíamos hacer un zoom en la parte interna (valores pequeños de a y de T), pero en ese caso no podremos ver qué pasa con los planetas exteriores. Éste es un caso clásico en el que conviene usar una escala logarítmica que permita abarcar todo el rango de valores de las medidas. La escala logarítmica, además, permite en este caso obtener una relación lineal entre las variables.

2. Ahora tenemos dos opciones, que veremos que son equivalentes, para hacer un gráfico logarítmico.

- Primero, vamos a representar el logaritmo de las variables en escala lineal. Usando la función $\log_{10}()$ del paquete numpy, grafica $\log_{10}(a)$ versus $\log_{10}(T)$. Recuerda que debes usar el logaritmo base 10 (si escribes log en vez de $\log_{10}$, estarás haciendo el logaritmo neperiano o base e).
- Aplicando logaritmo a la Ecuación 1, obtén expresiones para la pendiente y el punto de corte de la recta resultante.
- Ahora vamos a representar las variables directas a y T en escala logarítmica. Para esto utiliza el papel log-log suministrado y grafica manualmente el semieje mayor como función del período, ambos se estarán representando en escala logarítmica. En este tipo de gráfico, en lugar de haber un espaciamiento constante dado por cada unidad, el espaciamiento es constante para cada potencia de diez. Esta relación también es lineal. Traza una recta que pase por las medidas. En base a la Ecuación 1, ¿cuánto deben valer la pendiente y el punto de corte?
- Verifica el resultado obtenido en la parte b haciendo el gráfico del semieje versus el período en Python, en escala logarítmica. Haz un ajuste lineal de los datos por mínimos cuadrados utilizando la función `linregress()` de Scipy y obtén la pendiente y el punto de corte reportados por el programa.
- Calcula la masa del Sol a partir de los valores del punto corte obtenidos en las partes c y d. Compara ambos resultados entre sí. Compara con un valor de la masa del Sol obtenido de la literatura.

Parte B: Cálculo y propagación de errores

En esta parte haremos un estimado del error de la pendiente y el punto de corte obtenidos por mínimos cuadrados en la Parte A. Considera que las medidas de la Tabla 1 tienen un 10 % de error en T y un 12 % de error en a .

- Dibuja las barras de error de las medidas en tu gráfico manual de la parte A.2.b.
- Para estimar los errores en la pendiente m y el punto de corte c , en tu gráfico manual dibuja líneas con la inclinación máxima y mínima posible, tal que pasen dentro de las barras de error de los puntos. En la Figura 1 se muestra un ejemplo genérico.

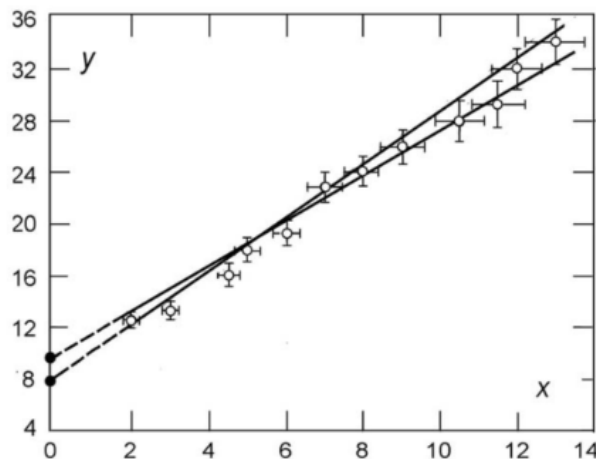


Figura 1: Rectas de máxima y mínima inclinación para la determinación de errores en la pendiente y punto de corte.

- Usa dos puntos sobre cada recta para calcular su pendiente m y la ecuación para estimar la pendiente de una recta a partir de dos puntos. Estima el punto de corte b de cada recta leyendo su ordenada en el punto de corte con el cero de las abscisas.
- Calcula los errores $\Delta m = \frac{m_{max} - m_{min}}{2}$ y $\Delta b = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}$.

Problemas de cálculo y propagación de errores

1. Sea $y = \log_{10}(x)$. Demuestra que un error Δy es proporcional al error fraccional ε_x en x . Calcula a qué error en y corresponde un 10 % de error en x .
2. Una variable x se mide con un cierto error Δx . Calcula el error de y sabiendo que $y = A\sqrt{x}$.
3. En el problema anterior, considera que sólo se conoce el error fraccional ε_x de x . Halla una expresión para el error correspondiente a y . Ahora halla una expresión para el error relativo ε_y . Calcule el error correspondiente a y para una medida de x con un error del 3 %. Para responder esto: ¿necesitas conocer el valor de x ?
4. La relación Período-Luminosidad de las Cefeidas permite calcular su magnitud absoluta M , conocido su Período de pulsación P como $M = a \log P + b$. Suponiendo que el error en el período es despreciable, calcula el error en la magnitud absoluta dados errores Δa y Δb en la pendiente y punto de corte de la relación.
5. Como veremos más adelante, la luminosidad L de una estrella se relaciona con su temperatura T y radio R según $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$. Encuentra la expresión para el error en la luminosidad ΔL suponiendo que se conoce la temperatura con un error ΔT y el radio con un error ΔR .
6. A continuación se presentan tres casos en los que dos variables y y x se relacionan a través de una ecuación no-lineal. Para cada caso propón cambios de variable tal que las nuevas variables y' , x' sigan una relación lineal de la forma $y' = mx' + b$ y encuentra las expresiones correspondientes para m y b :

a) $y = Ax^2 + Bx$

b) $y = \frac{Ax}{B + Cx}$

c) $y = Ae^{-Bx}$

Parte C: Cifras significativas

1. Las siguientes medidas pueden estar (o no) reportadas de forma incorrecta. Reporta las medidas de forma consistente con un error de **una (1) cifra significativa**.
 - a) $x = 2136.2675$ km, $\Delta x = 0.0001111$ km
 - b) $x = 2031.0034$ km, $\Delta x = 0.03$ km
 - c) $x = 2031.12$ km, $\Delta x = 158.1$ km
 - d) $x = 2031.12$ km, $\Delta x = 130$ km
 - e) $x = 300.000$ km/s, $\varepsilon_x = 1\%$ (Ayuda: reporta x y Δx usando notación científica).
2. Usa las expresiones de la parte B.5 para calcular la luminosidad L y el error ΔL de una estrella para la cual se ha obtenido una medida de la temperatura $T = 4300 \pm 210$ K y del radio $R = 153 \pm 15 R_\odot$. Reporta el error obtenido con una cifra significativa y la medida obtenida de la luminosidad de forma consistente con esto.
3. Para estrellas RR Lyrae se observa en el infrarrojo una relación (similar a la de las Cefeidas, parte B.4) lineal entre la magnitud absoluta M y el logaritmo de su período de pulsación $\log P$ de la forma: $M = a \log(P/\text{día}) + b$, donde $a = -2.58 \pm 0.20$ y $b = -0.84 \pm 0.09$.
 - a) Calcula el valor de la magnitud absoluta de una RR Lyrae cuyo período de pulsación es de $P = (0.55191 \pm 0.00005)$ d y su error correspondiente. Nota: Estos valores son totalmente representativos de casos reales.
 - b) En el cálculo anterior, calcula de forma separada el tamaño de cada uno de los términos en la ecuación de la propagación de error y compáralos. ¿Cuál es la variable que aporta más al estimado del error? ¿Cuál es la que aporta menos?

Anexo Práctico 1

Jupyter Lab Online

En el curso de Ciencias de la Tierra y el espacio II utilizaremos la herramienta Jupyter Lab, en su formato online. Para acceder debemos dirigirnos al siguiente enlace: <https://jupyter.org/try-jupyter/lab/>.

Podemos cargar un archivo .ipynb (Figura 2), o crear uno nuevo (Figura 3).

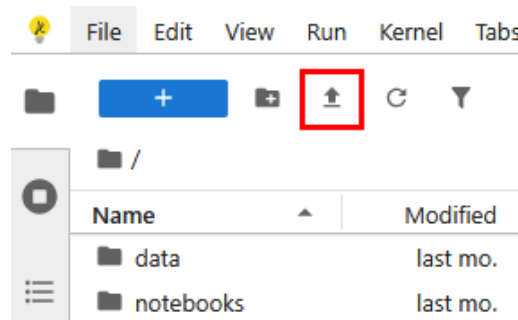


Figura 2: Cargado de un archivo ya existente.

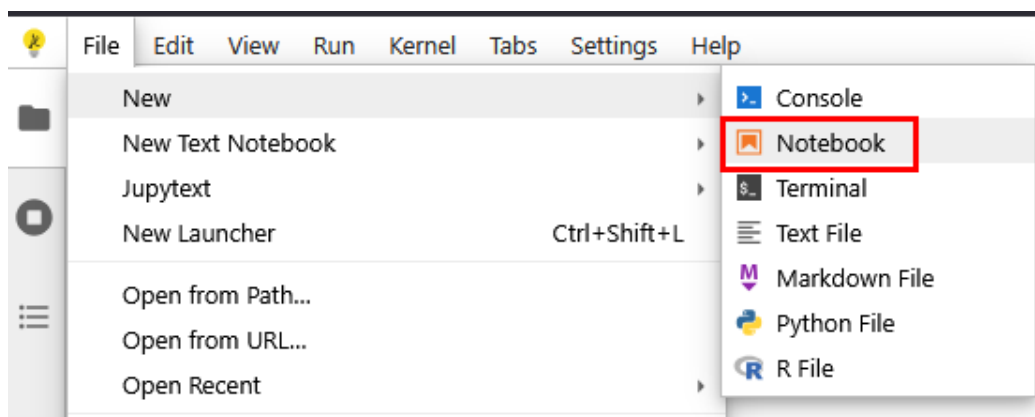


Figura 3: Creación de un nuevo archivo.

Una vez creado un archivo o cargado uno existente, se puede visualizar en el panel de la izquierda (Figura 4); si se desea trabajar con archivos de datos, los mismos también deben ser cargados y podrán visualizarse allí.

Una vez que se termina de trabajar en un archivo, el mismo debe ser descargado, haciendo clic secundario sobre el archivo y “Descargar” o “Download” (Figura 5). Se recomienda guardar el archivo con las modificaciones de cada clase en un pendrive o en la nube.

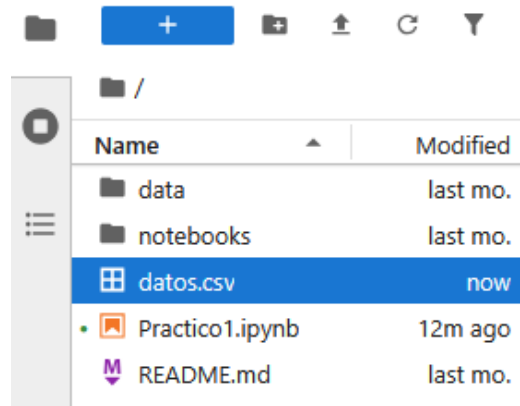


Figura 4: Panel para visualizar los archivos.

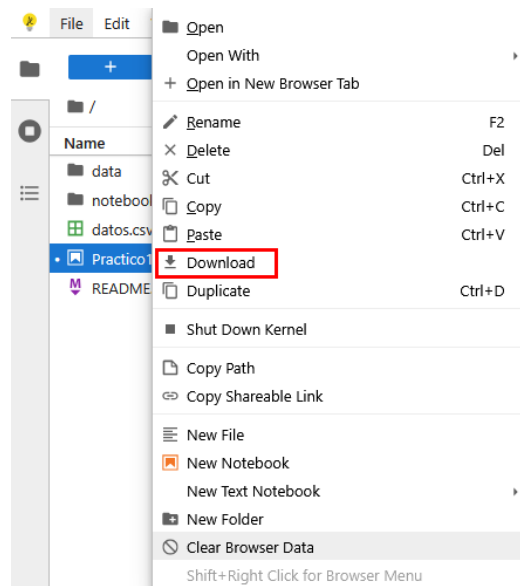


Figura 5: Descarga del archivo en el que se trabajó durante la clase.