

CAP. 5 - SISTEMAS LINEALES

5.1) DEFINICIONES Y EJEMPLOS

5.1.1. Elipses y conservación del oscilador armónico

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -\omega^2 x$$

(a) Mostrar que las órbitas son elipses de la forma:

$$\omega^2 x^2 + v^2 = C \quad (C \geq 0)$$

Tomamos:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{v}} = \frac{dx/dt}{dv/dt} = \frac{dx}{dv} = \frac{v}{-\omega^2 x} \Rightarrow x dx = -\frac{v}{\omega^2} dv$$

Integramos:

$$\int x dx = -\frac{1}{\omega^2} \int v dv \Rightarrow \frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{v^2}{2} + C_2 \right)$$

Reordenamos:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + C_1 = -\frac{v^2}{2} - \frac{C_2}{\omega^2} \Rightarrow \omega^2 x^2 + 2C_1 + v^2 + \frac{2C_2}{\omega^2} = 0$$

$$\therefore \omega^2 x^2 + v^2 = -2 \left(C_1 + \frac{C_2}{\omega^2} \right) \equiv C$$

(b) Mostrar que esta condición es equivalente a la conservación de la energía.

La energía del oscilador armónico simple está dada por:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$2E = m v^2 + k x^2$$

$$\frac{2E}{m} = v^2 + \left(\frac{k}{m} \right) x^2$$

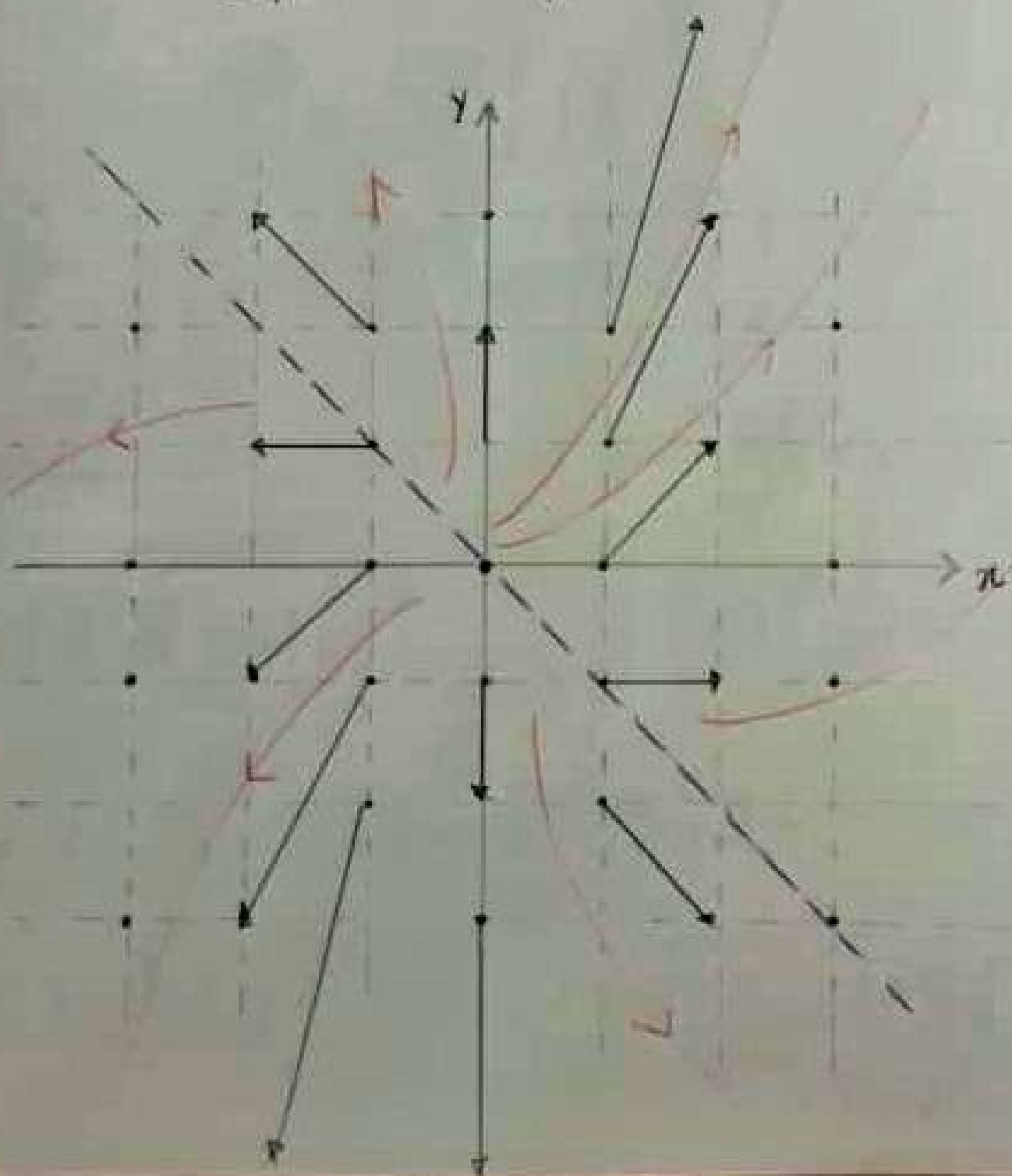
$$\frac{2E}{m} = v^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow C \equiv \frac{2E}{m}$$

$$\therefore v^2 + \omega^2 x^2 = C$$

5.1.7. Esquematizar el campo de vectores.
Indicar largo y dirección de los vectores.
Esquematizar algunas trayectorias.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = x + y \end{cases}$$



5.2.) CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES

5.2.2. Autovaleores Complejos.
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

(a) Encontrar A , y mostrar que $\lambda_1 = 1+i$,
 $\lambda_2 = 1-i$

con: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sea $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Los autovaleores son tales que: $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - (-1)(1)$$

$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm \frac{2}{2} \sqrt{1-2} \\ = 1 \pm \sqrt{1} = 1 \pm i$$

Los vectores propios son tales que:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Para $\lambda_1 = 1+i$:
$$\begin{pmatrix} 1-1-i & -1 \\ 1 & 1-1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ai - b = 0 \\ a - ib = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificación: $a=i, b=1 \Rightarrow \begin{cases} -i^2 - 1 = 0 \\ i - i = 0 \end{cases}$

Para $\lambda_2 = 1-i$:
$$\begin{pmatrix} 1-1+i & -1 \\ 1 & 1-1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ai - b = 0 \\ a + ib = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ Verificación: } \begin{cases} -i^2 - 1 = 0 \\ -i + i = 0 \end{cases}$$

(b) La solución del sistema es:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Usando la Identidad de Euler expresar $\vec{x}(t)$ en términos de senos y cosenos.

La solución general del sistema es:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1 i e^t e^{it} + c_2 e^t e^{-it} (-i)$$

$$y(t) = c_1 e^t e^{it} + c_2 e^t e^{-it}$$

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos(t) - i \sin(t)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t i (\cos(t) + i \sin(t)) + c_2 e^t (-i) (\cos(t) - i \sin(t)) \\ &= c_1 e^t (i \cos(t) - \sin(t)) - c_2 e^t (i \cos(t) + \sin(t)) \\ &= c_1 e^t (-\sin(t) + i \cos(t)) - c_2 e^t (i \cos(t) + \sin(t)) \end{aligned}$$

$$x(t) = e^t \left[(\sin t + i \cos t)(-c_2)e + (c_1)(-\sin t + i \cos t) \right]$$

$$= e^t \left[\sin t \underbrace{(-c_2 - c_1)}_{= A} + i \cos t \underbrace{(-c_2 + c_1)}_{= B} \right]$$

$$= e^t (A \sin(t) + B i \cos(t)).$$

$$y(t) = c_1 e^t (\cos(t) + i \sin(t)) + c_2 e^t (\cos(t) - i \sin(t))$$

$$= e^t [c_1 \cos(t) + i c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) - c_2 i \sin(t)]$$

$$= e^t \left[\cos(t) \underbrace{(c_1 + c_2)}_{= -A} + i \sin(t) \underbrace{(c_1 - c_2)}_{= B} \right]$$

$$= e^t (-A \cos(t) + i B \sin(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t (i B \cos(t) + A \sin(t)) \\ y(t) = e^t (-A \cos(t) + i B \sin(t)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^t (i B \cos(t) + A \sin(t)) \\ y(t) = e^t (-A \cos(t) + i B \sin(t)) \end{cases}$$

$$\vec{x}(t) = e^t \left[\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iB \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A \\ iB \end{pmatrix} \right]$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iB - A \\ A + iB \end{pmatrix}$$

5.2.11] Mostrar que $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$

tiene un solo autovalor λ . Resolver el sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ y bosquejar el diagrama de fases.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda(a+d) + (ad-bc) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \tau = 2\lambda \\ \searrow \Delta = \lambda^2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2}}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{2\lambda \pm 0}{2} = \lambda$$

Como A no es diagonalizable, aparece un término $t e^{\lambda t}$ en la solución. El sistema presenta degeneración.

$$\dot{y} = \lambda y \Rightarrow y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda x + b y(t) = \lambda x + b y_0 e^{\lambda t}$$

Tomamos el factor integrante: $e^{-\lambda t}$

$$\dot{x} e^{-\lambda t} = \lambda x e^{-\lambda t} + b y_0 e^{\lambda t} e^{-\lambda t}$$

$$\dot{x} e^{-\lambda t} - \lambda x e^{-\lambda t} = b y_0$$

$$\frac{d}{dt} (x e^{-\lambda t}) = b y_0$$

$$x e^{-\lambda t} = b y_0 t + C$$

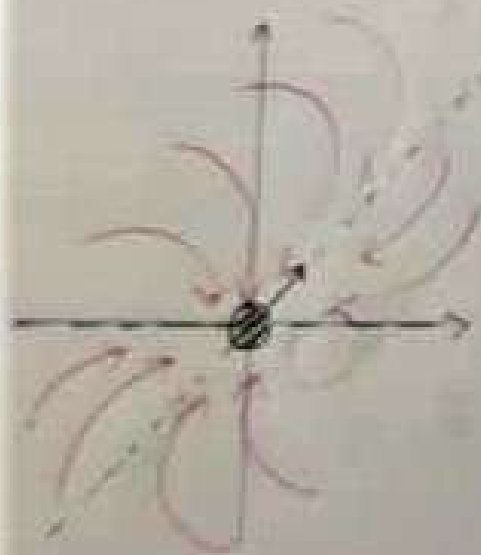
$$\therefore x(t) = e^{\lambda t} (b y_0 t + C)$$

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

El auto vector es tal que:

$$(A - \lambda I)\vec{\kappa} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b\kappa_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \kappa_2 = 0 \quad (b \neq 0) \Rightarrow \vec{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\lambda < 0$$

NODO DEGENERADO
ESTABLE



$$\lambda = 0$$



$$\lambda > 0$$

NODO DEGENERADO
INESTABLE

5.3) LOVE AFFAIRS

5.3.1) Nomenclatura Sugerir nombres para los cuatro estilos románticos determinados por a, b en

$$\hat{R} = aR + bJ$$

El parámetro a es una medida de la "valentía" de Romeo a expresar sus sentimientos por Julieta, mientras que b es una medida de la correspondencia de Julieta hacia Romeo.

1) $a > 0, b > 0$

$a > 0$. Romeo es atrevido.
 $b > 0$. Julieta le corresponde. $\Rightarrow$ "Fuego correspondido"

2) $a < 0, b > 0$

$a < 0$. Romeo es tímido.
 $b > 0$. Julieta lo anima. $\Rightarrow$ "Timidez con viento a favor"

3) $a > 0, b < 0$

$a > 0$. Romeo es perseverante.
 $b < 0$. Julieta lo ignora. $\Rightarrow$ "Obstinación contra la marea"

4) $a < 0, b < 0$

$a < 0$ Romeo no está interesado
 $b < 0$ Julieta tampoco. $\Rightarrow$ "Desencuentro"

(5.3.2) Considera el sistema $\dot{R} = J$
 $\dot{J} = -R + J$

(a) Caracteriza el estilo romántico de Romeo y Julieta:

Para este sistema: $a_R = 0$, $b_J = -1 (< 0)$
 $b_R > 0 (-1)$, $a_J = 1 (> 0)$
 $\dot{R} = a_R R + b_R J$ $\dot{J} = a_J J + b_J R$

Para Romeo:

$a_R = 0$ implica que Romeo no es tímido ni arriesgado para expresarle sus sentimientos a Julieta.
 $b_R > 0$ implica que Julieta lo anima a expresar sus sentimientos. Romeo solo reacciona.

Para Julieta: "Obstinación contra la marca".

$a_J = 1 (> 0)$ implica que Julieta es arriesgada con Romeo, y $b_J < 0$ implica amor no correspondido.

Notar que si $J > 0$ (Julieta ama a Romeo)
 $\dot{R} = J > 0$ y Romeo se mueve en la misma
dirección que Julieta $\Rightarrow$ Romeo persigue a
Julieta.

Ahora si $R > 0$ pero J no es lo bastante grande
 $\dot{J} = -R + J < 0$ y J disminuye por lo que
Julieta se aleja de Romeo.

(b) Clasifica el punto fijo en el origen.
¿Qué implica para la pareja?

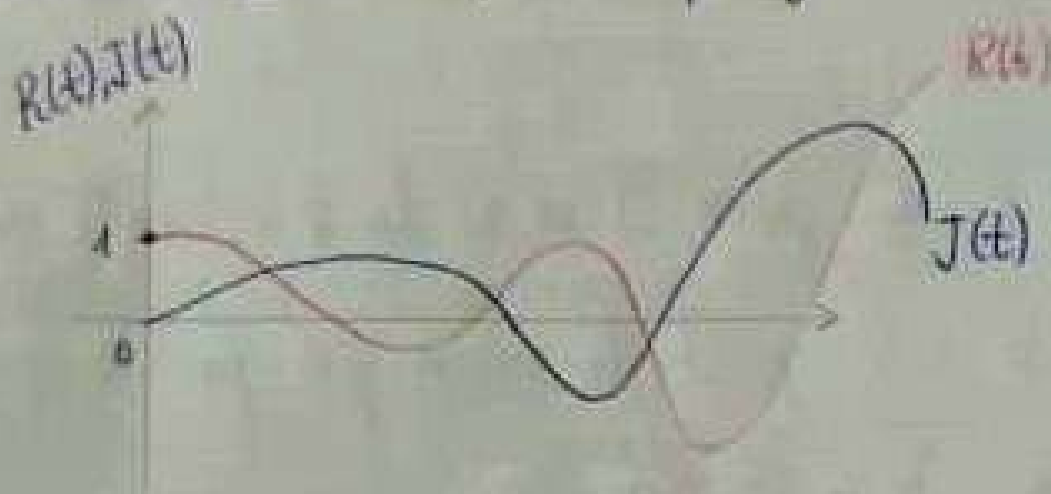
La matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{tr}(A) = 1 > 0 \\ \det(A) = 1 > 0 \end{matrix}$

$\tau^2 - 4\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0 \Rightarrow$ El $(0,0)$ es un
foco inestable (espiral): todas las trayectorias
se alejan del origen, espiralando.

Cualquier gesto crece en magnitud de forma
oscilatoria



(c) Bosquejar $R(t)$, $J(t)$ para $R(0)=1$, $J(0)=0$
 Como J lidera la dinámica, su señal está "adelantada" a R . Hay un desfase.



(5.3.3) Fuera de contacto con sus propios sentimientos
 Considera el sistema: $\begin{cases} \dot{R} = aJ \\ \dot{J} = bR \end{cases}$ ¿Qué ocurre?

La matriz del sistema resulta: $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \tau = 0 \\ \Delta = -ab \end{matrix} \Rightarrow \lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{\pm \sqrt{4ab}}{2} = \pm \sqrt{ab}$$

Tendremos:

- 1) $ab > 0$. Nodo silla. ($\Delta < 0$)
- 2) $ab < 0$. Oscilaciones ($\Delta > 0$)
- 3) $ab = 0$. Nodo degenerado.

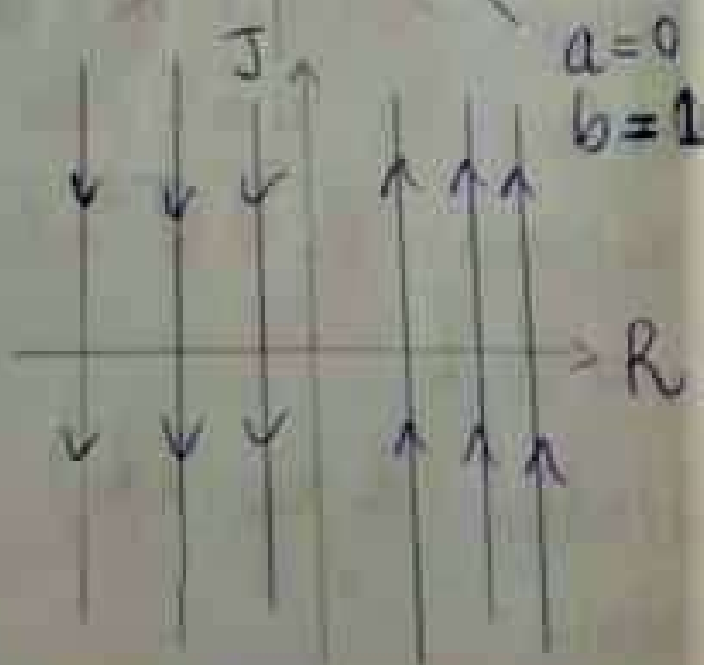
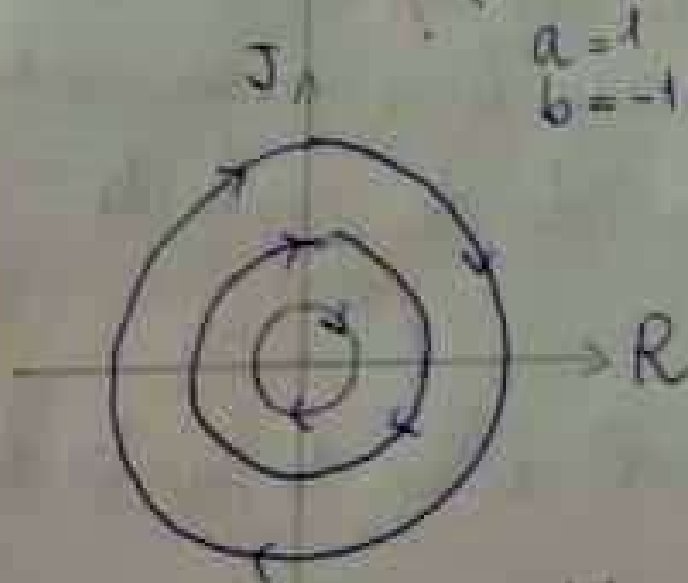
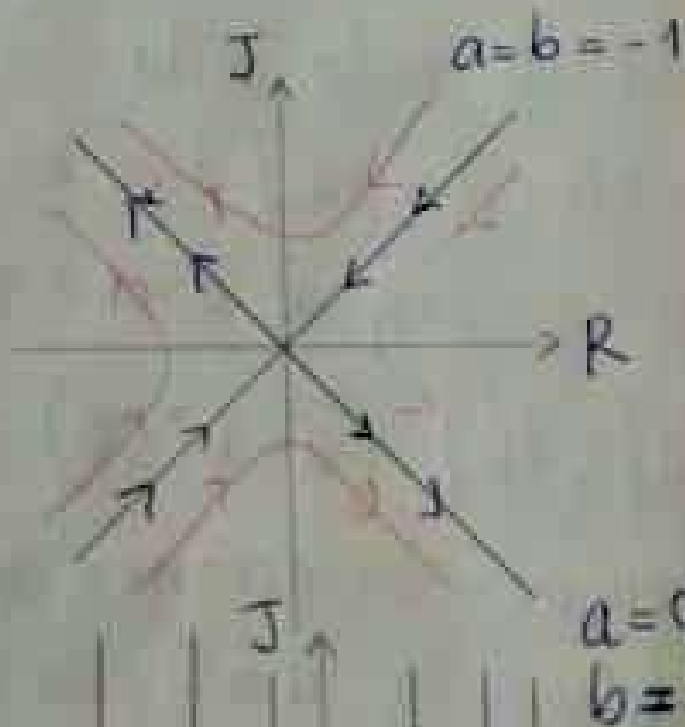
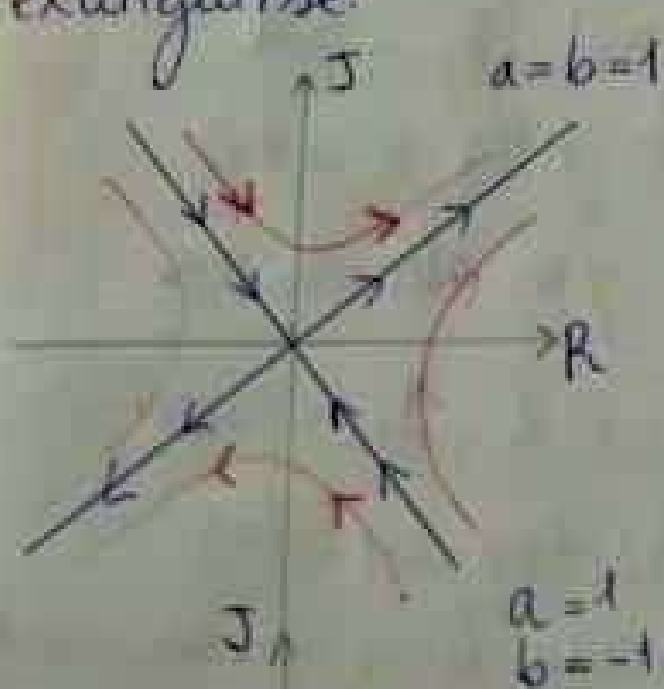
Si $ab > 0$:

1a) $a > 0, b > 0$. (estímulo mutuo). Crecimiento exponencial en la misma dirección emocional. Ambos aman/odian a la vez.

1b) $a < 0, b < 0$. Cada uno reacciona a la inversa del otro. Se polariza la relación.

Si $ab < 0$: $\lambda = \pm \sqrt{(-1) |ab|} = \pm i |ab|$.

Habrà un "tira y afloje" cíclico, sin explotar o extinguirse.



Si $b=1, a=-1$ giro antihorario.

(5.3.4) Fuego y Agua: ¿los opuestos se atraen?

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = -bR - aJ \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = a - a = 0$$

$$\det(A) = \Delta = -a^2 - (-b^2) = b^2 - a^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 0\lambda + b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

Tendremos 3 casos:

1) $|a| > |b|$ ($a^2 - b^2 > 0$): $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ y opuestos.

Tendremos nodo silla. Si $b=0$, $\lambda_{1,2} = \pm a$

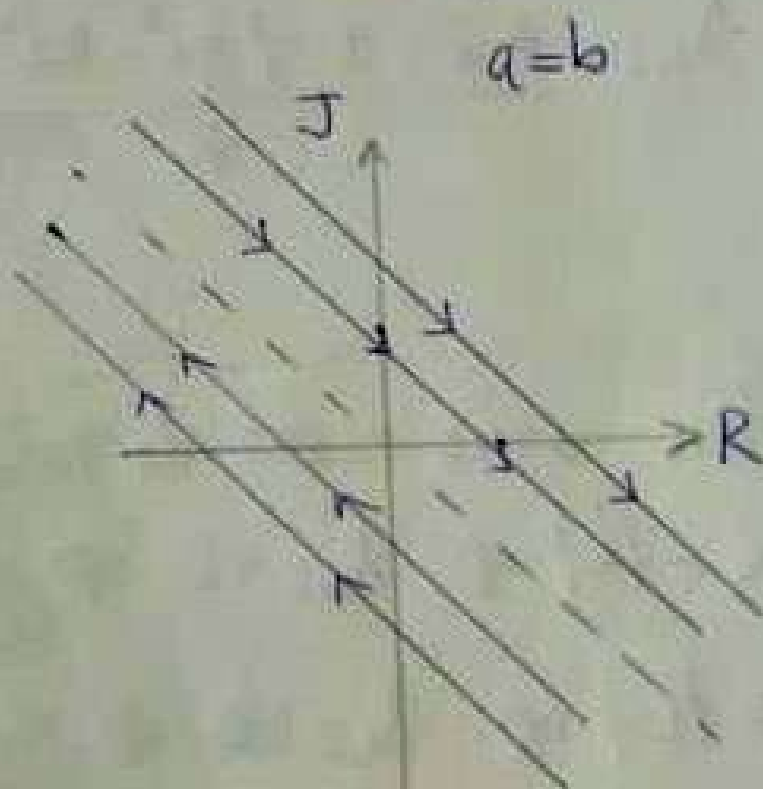
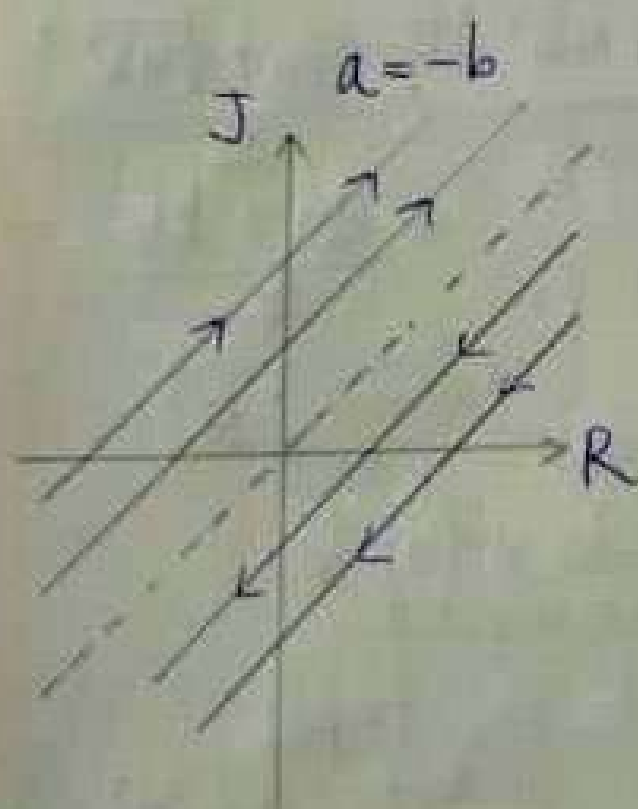
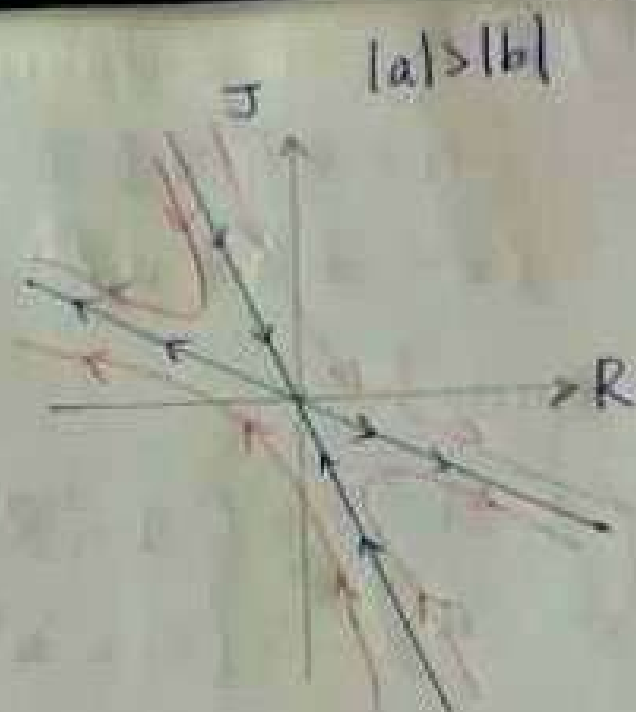
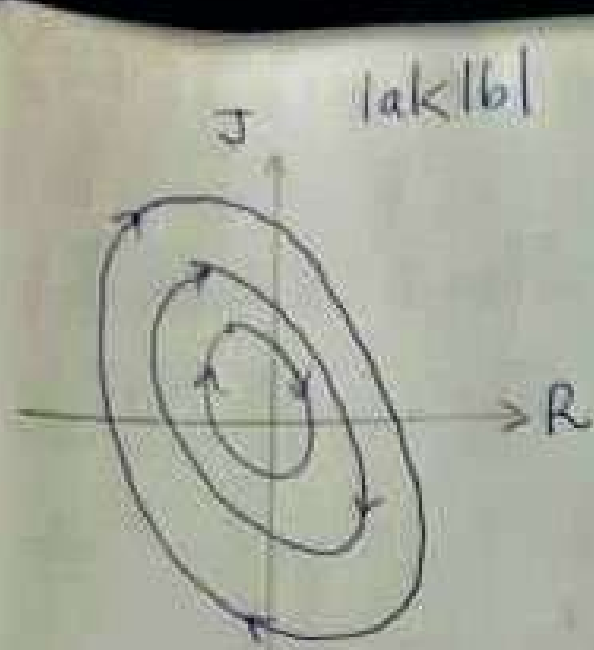
$(\dot{R} = aR, \dot{J} = -aJ)$ es un nodo silla $\forall a \neq 0$.

Según signo de a uno crece y el otro decrece.

2) $|a| < |b|$ ($a^2 - b^2 < 0$): $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$

Tendremos oscilaciones con órbitas cerradas periódicas. Si $a=0$, la rotación tiene frecuencia $|b|$ y se conserva $R^2 + J^2$. El sentido de giro lo da el signo de b .

3) $|a| = |b|$ (degenerado). $\lambda_{1,2} = 0$. Línea de puntos de equilibrio.



concordancia
simétrica.

desacuerdo simétrico.

Dependiendo de (J_0, R_0)
puede haber "amor
co-escalado" o "desamor
co-escalado".

$$J(t) = \left(J_0 + \frac{aR_0}{b} \right) e^{bt} - \frac{aR_0}{b}$$

$$\text{Si } b < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} J(t) = -\frac{aR_0}{b} = \frac{aR_0}{|b|}$$

$$\Rightarrow \text{I) Si } aR_0 > 0 \Rightarrow J^* > 0 \Rightarrow \text{amor}$$

$$\text{II) Si } aR_0 < 0 \Rightarrow J^* < 0 \Rightarrow \text{odio}$$

$$\text{Si } b = 0 \Rightarrow \dot{J} = aR_0 \equiv J_0$$

$$\text{Si } b > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} J(t) \rightarrow \pm \infty \text{ dependiendo de } J_0 + \frac{aR_0}{b}$$

$$\Rightarrow \text{I) Si } J_0 + \frac{aR_0}{b} > 0 \Rightarrow J_0 > -\frac{aR_0}{b} \Rightarrow \text{amor}$$

$$\text{II) Si } J_0 + \frac{aR_0}{b} < 0 \Rightarrow J_0 < -\frac{aR_0}{b} \Rightarrow \text{odio}$$

La dinámica depende de los parámetros (a, b, J_0, R_0) y las condiciones iniciales.

(5.3.6) Romeo el robot ($\dot{R}=0$)

$$\dot{J} = aR + bJ$$

¿Julietta lo termina amando u odiando?

$$\text{Si } \dot{R}=0 \Rightarrow R(t) = R_0$$

$$\Rightarrow \dot{J} = aR_0 + bJ \Rightarrow J(t) = \left(J_0 + \frac{aR_0}{b}\right)e^{bt} - \frac{aR_0}{b}$$

$$\frac{dJ}{aR_0 + bJ} = dt \Rightarrow \int_{J_0}^J \frac{dJ'}{aR_0 + bJ'} = t$$

$$= \int_{J_0}^J \frac{dJ'/b}{\left(\frac{aR_0}{b} + J'\right)} = \frac{1}{b} \int_{J_0}^J \frac{dJ'}{\alpha + J'} = \frac{1}{b} \ln|\alpha + J'| \Big|_{J_0}^J$$

$$\Rightarrow \ln|\alpha + J| - \ln|\alpha + J_0| = bt$$

$$\ln\left(\frac{\alpha + J}{\alpha + J_0}\right) = bt \Rightarrow \alpha + J = (\alpha + J_0)e^{bt}$$

$$\begin{aligned} \therefore J(t) &= (\alpha + J_0)e^{bt} - \alpha \\ &= \left(J_0 + \frac{aR_0}{b}\right)e^{bt} - \frac{aR_0}{b} \end{aligned}$$

(5.3.5) Si Romeo y Julieta son "clones",

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = bR + aJ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{R} = aR + bJ \\ \dot{J} = bR + aJ \end{cases}$$

¿Qué ocurre?

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 2a \\ \Delta = a^2 - b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{4b^2}}{2} \\ = \frac{2a \pm 2b}{2} \\ = \boxed{a \pm b}$$

Existen cuatro casos de interés:

- 1) $a < -|b| \Rightarrow \lambda_{1,2} < 0 \Rightarrow$ nodo estable.
(abandono)
- 2) $a > |b| \Rightarrow \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow$ nodo inestable
(amor sin tope) $R, J > 0$
- 3) $|a| < |b| \Rightarrow$ silla.
- 4) $a = \pm b \Rightarrow$ frontera línea de equilibrio.
(equilibrada relación).