

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^t \left(C_1 e^{it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left(C_1 (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 (\cos(-t) + i \sin(-t)) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left(C_1 (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 (\cos t - i \sin t) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} i \cos t - \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -i \cos t - \sin t \\ \cos t - i \sin t \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} i \cos t \\ i \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -i \cos t \\ -i \sin t \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left((C_1 + C_2) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i (C_1 - C_2) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right) \\
 &= e^t \left(C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

5.2.11 Show that any matrix of the form $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, with $b \neq 0$, has only a one-dimensional eigenspace corresponding to the eigenvalue λ . Then solve the system $\dot{x} = Ax$ and sketch the phase portrait.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

autovalores

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = a$$

raiz doble

2 posibilidades:

- nodo estrella
- nodo degenerated
↳ estrella
↳ inestable

auto vectores

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & a-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Intento hallar $x(t)$ $y(t)$

$$\dot{y} = ay \Rightarrow y = C_2 e^{at}$$

$$\dot{x} = ax + by \Rightarrow \dot{x} = ax + C_2 b e^{at}$$

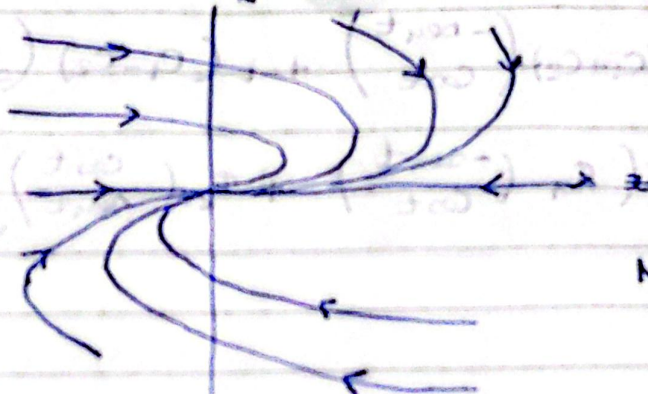
$$\ddot{x} - ax = c_2 b e^{at}$$

$$e^{-at} \ddot{x} - a e^{-at} x = \frac{d}{dt} (e^{-at} \dot{x}) = c_2 b$$

$$e^{-at} \dot{x} = \int c_2 b dt = c_1 + c_2 b t$$

$$\dot{x} = c_1 e^{at} + c_2 b t e^{at}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{at} \begin{pmatrix} t \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$



Node degenerated
estable.

5.3 Love Affairs

5.3.1 (Name-calling) Suggest names for the four romantic styles, determined by the signs of a and b in $\dot{R} = aR + bJ$.

5.3.2 Consider the affair described by $\dot{R} = J$, $\dot{J} = -R + J$.

- Characterize the romantic styles of Romeo and Juliet.
- Classify the fixed point at the origin. What does this imply for the affair?
- Sketch $R(t)$ and $J(t)$ as functions of t , assuming $R(0) = 1$, $J(0) = 0$.

In each of the following problems, predict the course of the love affair, depending on the signs and relative sizes of a and b .

5.3.3 (Out of touch with their own feelings) Suppose Romeo and Juliet react to each other, but not to themselves: $\dot{R} = aJ$, $\dot{J} = bR$. What happens?

5.3.4 (Fire and water) Do opposites attract? Analyze $\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = -bR - aJ$.

5.3.5 (Peas in a pod) If Romeo and Juliet are romantic clones ($\dot{R} = aR + bJ$, $\dot{J} = bR + aJ$), should they expect boredom or bliss?

5.3.6 (Romeo the robot) Nothing could ever change the way Romeo feels about Juliet: $\dot{R} = 0$, $\dot{J} = aR + bJ$. Does Juliet end up loving him or hating him?

5.3.1.

Si $a > 0, b > 0$ a - autorreacción b - respuesta al otro.
ENTUSIASTA - Estimulado internamente y se alimenta del afecto del otro, la pasión crece sin freno.

Si $a < 0, b > 0$
CAUTELOSO - Modera sus propios impulsos, responde de forma sensible al otro.

Si $a > 0, b < 0$
EGOCENTRICO - Estimulado internamente, pero rechaza o contradice lo que recibe del otro.

Si $a < 0, b < 0$
INDIFERENTE - Apaga sus sentimientos, y se aísla de la influencia de lo externo, tiende a indiferencia o desapego.

5.3.2

Sistema: $\dot{R} = J$

$$\dot{J} = -R + J$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

autovalores

$$\Rightarrow \bar{c} = 1$$

$$\Delta = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - (-1) = -\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

no inestable

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{1}{2}\right) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PUNTO FIJO EN ORIGEN

Es una espiral inestable

Las emociones de Romeo y Julieta oscilarán entre el amor y el odio con una amplitud creciente.

c) $R(t)$ y $J(t)$ con $R(0)=1$ $J(0)=0$

$$\dot{R} = J \Rightarrow \ddot{R} = \dot{J} = -R + J = -R + \dot{R}$$

$$\ddot{R} - \dot{R} + R = 0$$

la ecuación característica es:

$$r^2 - r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R(t) = e^{t/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

cond Iniciales

$$R(0)=1 \Rightarrow C_1=1$$

$$\dot{R}(0)=J(0)=0 \text{ derivada igual a } 0 \text{ en } t=0$$

$$\frac{1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = 0 \text{ Como } C_1=1$$

$$\text{queda } C_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

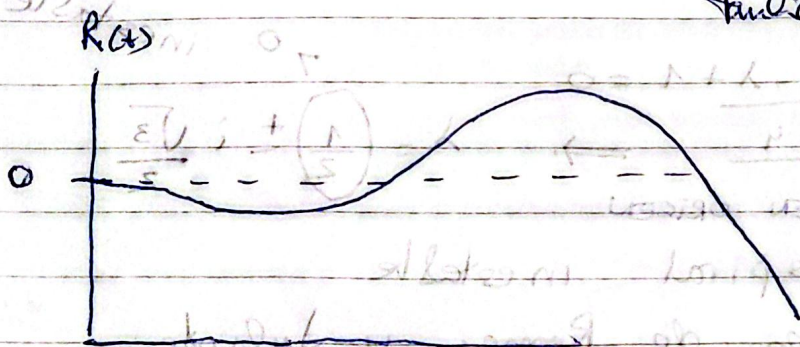
$$R(t) = e^{t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

$$\text{Como } J(t) = \dot{R}(t)$$

$$J(t) = e^{t/2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

oscila pero
con amplitud
creciente
exponencialmente

oscila con desfase pero
tambien con amplitud creciente



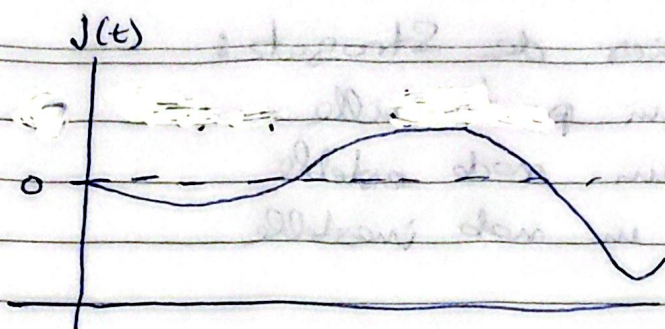
frecuencia

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

envolvente crece

$$\text{Como } e^{t/2}$$

ESPIRAL INESTABLE



las amecanas oscilan
la relación es inestable
extrema de intensidad
relación tóxica.

5.3.3

$$\dot{R} = aJ$$

$$J = bR$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

$$\bar{c} = 0$$

$$\Delta = -ab$$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & a \\ b & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - ab = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{ab}$$

Si ab es negativo $\Rightarrow$ es un centro (indiferente)

Si ab es positivo $\Rightarrow$ es un punto silla

(has una dirección en que las perturbaciones crecen y otra en que decrecen. En el plano se aproximan por la estable y se alejan por la inestable)

5.3.4

$$\dot{R} = aR + bJ$$

$$J = -bR - aJ$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

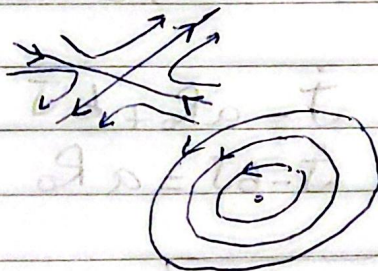
$$\Delta = -a^2 + b^2$$

$$\bar{c} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ -b & -a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(-a - \lambda) + b^2 = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

$b < a \Rightarrow$ " punto silla

$a < b \Rightarrow$ es un centro
(órbitas cerradas
periódicas)



5.3.5

$$\dot{R} = aR + bJ$$

$$\dot{J} = bR + aJ$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

$$\bar{c} = 2a$$

$$\Delta = a^2 - b^2$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda = a \pm b$$

→ Según los criterios de Strogatz:

Si $a < b$ es un punto silla

Si $a < b < 0$ es un nodo estable

Si $0 < b < a$ es un nodo inestable

5.3.6

$$\dot{R} = 0$$

$$\dot{J} = aR + bJ$$

$$\begin{pmatrix} \dot{R} \\ \dot{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} \dot{R} = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ línea de puntos fijos según Strogatz

Si $b < 0$ estable

Si $b > 0$ inestable

autovalores

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(b - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = b$$

Ecuaciones:

Hallo $J(t)$ y $R(t)$

$$R(t) = R(0) = R_0 \quad (\text{cte})$$

$$\dot{J} = aR_0 + bJ$$

$$\dot{J} - bJ = aR_0 \quad \leftarrow \text{ec. diferencial según } J$$

$$\boxed{\text{Si } b \neq 0} \quad J(t) = \left(J(0) + \frac{aR_0}{b} \right) e^{bt} - \frac{aR_0}{b}$$

$$\text{Si } \boxed{b = 0} \quad J(t) = J(0) + aR_0 t$$

R_0 no cambia nunca

Si $b < 0$, Julieta se estabiliza alrededor de un punto
 Si $b > 0$ la respuesta de Julieta crece sin límite
 Si $b = 0$ Julieta responde en forma lineal con el tiempo