

APRENDIZAJE Y EMOCIONES: UN ENFOQUE DE SISTEMAS DINÁMICOS

Rossana Azar

En este trabajo se presenta un sistema dinámico que incorpora la interacción entre las emociones y la comprensión en el proceso de aprendizaje. Se discute la estabilidad de los puntos fijos, se asignan valores a los parámetros a fin de realizar algunas simulaciones numéricas que ilustren los resultados y se muestren las trayectorias para diferentes condiciones iniciales. Finalmente, se plantean algunas preguntas que este modelo podría responder.

I. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas y procesos reales exhiben características complejas, no lineales, lo que impide que puedan tratarse satisfactoriamente a través de la teoría de sistemas lineales. Esto convierte a la teoría de sistemas dinámicos en una rama de las matemáticas aplicadas muy estudiada por la potencialidad de sus métodos y perspectivas.

En la descripción de la Conference on Dynamical Systems (2013), la Society for Industrial and Applied Mathematics [SIAM] afirma: “La aplicación de la teoría de sistemas dinámicos en áreas fuera de las matemáticas continúa siendo un esfuerzo vibrante, emocionante y fructífero. Dichas áreas son diversas y multidisciplinarias, abarcando todas las áreas de la ciencia aplicada y la ingeniería, incluidas la biología, la química, la física, las finanzas y las matemáticas aplicadas industriales” [1].

El área de la enseñanza no ha quedado ajena a la incorporación de esta herramienta y muchos modelos matemáticos se han aplicado a diversos temas de investigación educativa, como el rendimiento académico [2], entre otros.

Monteiro y Notargiacomo [3] sostienen que desde el punto de vista de quien aprende, el saber puede dividirse en tres partes: lo que se considera entendido (U), lo que se considera aun dudoso (D) y lo que se ignora [$1 - (U + D)$]. Con el fin de examinar la interacción entre las dos primeras partes, formulan y analizan un modelo matemático en dos posibles escenarios: uno en el cual las dudas se conciben como indeseables y problemáticas; y otro, en el que por el contrario las dudas son apreciadas como potenciadoras del proceso de aprendizaje. El sistema propuesto es del tipo Lotka Volterra

$$\frac{dU}{dt} = a[U(U - 1)(\alpha - U) - fUD] \quad (1)$$

$$\frac{dD}{dt} = b[D(\beta - D) + gUD][1 - (U + D)] \quad (2)$$

siendo $0 < \alpha < 1$ el conocimiento mínimo necesario para comenzar a aprender sobre un tema y $0 < \beta < 1$ el máximo nivel de duda que se puede tener acerca de algo que no se aprendió todavía. Los parámetros a y b , están relacionados con la velocidad del proceso de aprendizaje y son positivos. Los parámetros f y g describen la interacción entre $U(t)$ y $D(t)$ tal que $fg > 0$. De esta

forma, en caso de que la duda conspire contra la comprensión se cumplirá que $f > 0$ y $g > 0$; en tanto que cuando la impulse se dará que $f < 0$ y $g < 0$. El término [$1 - (U + D)$] restringe el dominio al triángulo rectángulo dado por $0 \leq U \leq 1$, $0 \leq D \leq 1$ y $0 \leq U + D \leq 1$.

Estudios provenientes de la neurociencia [4] sugieren que, al igual que la duda, las emociones pueden promover o limitar el aprendizaje. Asimismo, del campo de la Didáctica de las Ciencias también surgen estudios al respecto. En palabras de la pedagoga Neus Sanmartí,

En el aprendizaje el mundo de las emociones también tiene mucha importancia [...] En la realización de actividades no sólo se tienen en cuenta las ideas y los procedimientos, sino también los sentimientos, la imagen que cada persona tiene de sí misma, cómo piensa que la ven los otros, el grado de auto-estima, los valores personales, la motivación, los intereses, etc. Estas variables parece que son especialmente significativas cuando se ha de explicar por qué no todos los estudiantes aprenden igualmente. Los estudiantes tienen sentimientos bien diversificados en relación con la ciencia y su aprendizaje [...] Y es bien sabido que la actitud con la que una persona afronta el estudio de una determinada temática es una variable muy importante en relación con el éxito del aprendizaje [5].

A este respecto, Jensen afirma [6]: “Las emociones se engranan en el significado y predicen el aprendizaje futuro porque involucran nuestros objetivos, creencias, sesgos y expectativas [...] En el aula, los estados emocionales son una importante condición en torno a la cual los educadores deben dirigir la enseñanza”.

Con todo lo anterior en mente, este trabajo tiene por objetivo aplicar el enfoque de sistemas dinámicos descrito en [3] para analizar cómo las emociones influyen en el proceso de aprendizaje significativo, discutir la estabilidad de los puntos fijos y realizar simulaciones numéricas para ilustrar los resultados analíticos.

II. LAS EMOCIONES Y EL APRENDIZAJE

Aportes de las neurociencias [4, 7] establecen que la Unidad Cuerpo Cerebro Mente (UCCM) influye e incluso determina nuestros modos de actuar, de aprender, de ser. En tanto la principal función de nuestro cerebro es la supervivencia, esta interviene incluso en nuestro aprendizaje. ¿De qué forma? Una vez que la información ingresa a nuestro Sistema Nervioso Central (SNC) recurrimos al

denominado “Banco de memoria” donde se compara esta experiencia actual, con otras del pasado y se la clasifica como “a favor de la supervivencia” o “en contra de la supervivencia”.

El aprendizaje se puede dividir en: a) Aprendizaje explícito o cognitivo, el cual implica un alto consumo de energía para nuestra UCCM ya que requiere de un esfuerzo consciente; se trata de un proceso lento y que se olvida con facilidad. b) Aprendizaje implícito o emocional, el cual es automático, se adquiere rápidamente y es indeleble en el tiempo. Puesto que el cerebro privilegia el poco gasto energético, privilegia a este modo de aprendizaje.

Dado que las emociones pueden estimular la actividad de las redes neuronales reforzando las conexiones sinápticas, los aprendizajes se consolidan de mejor manera en nuestro cerebro cuando se las involucra. Sin embargo, las evidencias muestran que las emociones pueden promover o limitar el aprendizaje. Las emociones “positivas” son las que se relacionan con un aumento y mejora en la consolidación del aprendizaje; mientras que cuando el aprendizaje se acompaña de emociones “negativas” como rabia o miedo, el proceso se retrasa y se vuelve más complicado aprender. Si bien breves períodos de estrés mejoran el aprendizaje (memoria explícita), altos niveles de estrés sostenidos producen daños y pueden llegar a impedir la cognición.

Según expresa Sanmartí [5], las emociones que genera la ciencia y su aprendizaje son prerequisites para una construcción significativa de este tipo de conocimiento, y por lo tanto, conseguir que éstas sean positivas es el reto. En tal sentido, sugiere algunos aspectos relacionados con el campo emocional a tener en cuenta:

1. Las creencias que se tienen sobre la mejor manera de aprender Ciencias [...] Por ejemplo, muchos jóvenes no valoran la importancia de la reflexión sobre las propia maneras de pensar y de realizar las tareas, y prefieren que sea el profesor quien les indique qué han de memorizar, qué hacen bien y qué hacen mal. Hay alumnos a quienes les gustan los estilos de trabajo que promueven la curiosidad o el trabajo, y, en cambio, otros prefieren la presentación sistemática de las nuevas informaciones o la competitividad. Según como se relacione el sistema de enseñanza del profesorado con las creencias del alumnado, los resultados de aprendizaje pueden ser muy distintos.
2. Los fracasos continuos conllevan que muchos estudiantes creen que no son capaces de aprender. Cuando esto sucede, [...] el ciclo del fracaso se realimenta

III. EL MODELO

Nuestro modelo sobre el proceso de aprendizaje se construye de la siguiente manera. Medimos la evolución de la comprensión a través de la variable $C(t)$ real, de tal forma que en ausencia de emociones, suponemos que su evolución temporal se puede describir mediante la expresión:

$$\frac{dC}{dt} = C(\alpha - C)(C - 1) \quad (3)$$

siendo $0 < \alpha < 1$ el conocimiento previo necesario para aprender uno nuevo.

Los puntos fijos que surgen de resolver $\frac{dC}{dt} = 0$ son 0, α y 1. La figura 1 muestra el retrato de fase de este sistema para $0 \leq C \leq 1$.

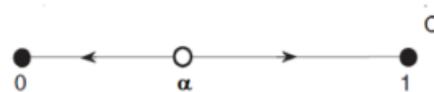


Figura 1. Retrato de fase de $C(t)$ en ausencia de interacción con las emociones.

Como se puede observar, $\frac{dC}{dt}$ es negativo para $0 < C < \alpha$ y positivo para $\alpha < C < 1$. Por lo tanto, 0 y 1 son estados estables y α es un estado inestable. En consecuencia, a medida que pasa el tiempo la comprensión $C(t)$ tiende a 0 cuando $C(0) \in [0, \alpha]$, o lo que es lo mismo, no habrá aprendizaje si los conocimientos previos son menores al mínimo necesario. Por otra parte, cuando $C(0) \in [\alpha, 1]$ la ecuación predice que se logrará una comprensión completa ya que $C(t)$ tiende a 1.

Utilizaremos la variable $E(t)$ real, positiva, para representar la evolución en el tiempo de las emociones que un determinado saber genera en quien lo está aprendiendo. Para escribir la ecuación que la rige asumiremos que cuando no se sabe nada con respecto a una temática y no se estudia sobre ella, $E(t)$ puede describirse a través de la siguiente relación recursiva:

$$\frac{dE}{dt} = E(\gamma - E) \quad (4)$$

en donde $\gamma > 0$ corresponde al estado emocional (más favorable posible), previo al inicio del proceso de aprendizaje, siendo que “en los primeros cursos de la escolaridad los alumnos acostumbra a tener mucho interés en conocer cómo funcionan los objetos y por qué ocurren los fenómenos” [5].

Al resolver $\frac{dE}{dt} = 0$ surgen los puntos fijos 0 y γ , representados en la figura 2.

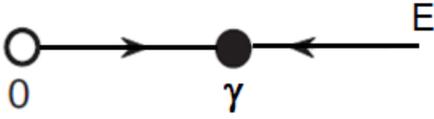


Figura 2. Retrato de fase de $E(t)$ sin interacción con $C(t)$.

Dado que $\frac{dE}{dt}$ es positivo para $0 < E < \gamma$ y negativo para $\gamma < E$, para cualquier condición inicial $E(t)$ tiende a γ , siendo el punto fijo 0 inestable y γ estable.

De acuerdo con lo expresado previamente existe una interacción entre $C(t)$ y $E(t)$. En palabras de Sanmartí:

“De la misma manera que una persona disfruta más con un juego cuanto más va adquiriendo las habilidades y los conocimientos que le permiten desarrollarlo bien, también es necesario aprender ciencia para poder disfrutar con ella” [5].

Con el fin de contemplar los efectos de esta interacción proponemos escribir el modelo completo como sigue :

$$\frac{dE}{dt} = E(\gamma - E) + gCE \quad (5)$$

$$\frac{dC}{dt} = C(\alpha - C)(C - 1) + fC(E - \gamma) \quad (6)$$

siendo $0 < \alpha < 1$ y $\gamma > 0$ los parámetros mencionados anteriormente.

De la ecuación se deduce que si $E > \gamma$ las emociones actúan favoreciendo la comprensión, al tiempo que si $E < \gamma$ lo hacen generando un efecto negativo en ella. Por último, f y g son dos parámetros positivos que se utilizan para cuantificar la fortaleza de la interacción.

IV. PUNTOS FIJOS Y COMPORTAMIENTO

Imponiendo a las ecuaciones 5 y 6 las condiciones $\frac{dE}{dt} = 0$ y $\frac{dC}{dt} = 0$ obtenemos 6 puntos fijos. Usando la notación $p_i = (E^*, C^*)$, dichos puntos son:

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (\gamma, 0)$$

Además, si se cumple la restricción

$$(\alpha + 1)^2 \geq 4(f\gamma + \alpha) \quad (7)$$

tal que C es real y positivo aparecen:

$$p_3 = \left(0, \frac{(\alpha+1) - \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4(f\gamma + \alpha)}}{2}\right),$$

$$p_4 = \left(0, \frac{(\alpha+1) + \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4(f\gamma + \alpha)}}{2}\right),$$

Por último, cuando se cumple que $(\alpha + 1 + fg)^2 \geq 4\alpha$

tal que C es real y positivo existen:

$$p_5 = \left(\gamma + g \cdot \frac{(\alpha + 1 + fg) - \sqrt{(\alpha + 1 + fg)^2 - 4\alpha}}{2}, \frac{(\alpha + 1 + fg) - \sqrt{(\alpha + 1 + fg)^2 - 4\alpha}}{2}\right),$$

$$p_6 = \left(\gamma + g \cdot \frac{(\alpha + 1 + fg) + \sqrt{(\alpha + 1 + fg)^2 - 4\alpha}}{2}, \frac{(\alpha + 1 + fg) + \sqrt{(\alpha + 1 + fg)^2 - 4\alpha}}{2}\right)$$

A partir de la matriz Jacobiana del sistema,

$$J = \begin{bmatrix} \gamma - 2E + gC & gE \\ Cf & f(E - \gamma) - \alpha + 2(\alpha + 1)C - 3C^2 \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos fijos y estudiando los valores propios asociados (λ_1 y λ_2) podemos deducir la estabilidad de dichos puntos.

En el cuadro I se muestran los valores propios obtenidos.

| PUNTO FIJO | VALORES PROPIOS |
|---------------|--|
| p_1 | $\lambda_1 = \gamma > 0$ $\lambda_2 = -(f\lambda + \alpha) < 0$ |
| p_2 | $\lambda_1 = -\gamma < 0$ $\lambda_2 = -\alpha < 0$ |
| p_3 | $\lambda_1 = \gamma + g \cdot C_1 > 0$ $\lambda_2 = -(f\gamma + \alpha + 3C_1^2) + 2(\alpha + 1) \cdot C_1 > 0$ |
| p_4 | $\lambda_1 = \gamma + g \cdot C_2 > 0$ $\lambda_2 = -(f\gamma + \alpha + 3C_2^2) + 2(\alpha + 1) \cdot C_2 > 0$ |
| p_5 y p_6 | $\lambda_{1,2}$: raíces de $\lambda^2 - T \cdot \lambda + \Delta = 0$ |

Cuadro I. Siendo τ y Δ , respectivamente, la traza y el determinante de la matriz Jacobiana; $C_1 = \frac{(\alpha+1) - \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4(f\gamma + \alpha)}}{2}$ y $C_2 = \frac{(\alpha+1) + \sqrt{(\alpha+1)^2 - 4(f\gamma + \alpha)}}{2}$.

De acuerdo a los valores de λ_1 y λ_2 tendremos diferentes comportamientos. Si solo estamos interesados en la estabilidad, y no en la geometría detallada de las trayectorias, entonces podemos clasificar los puntos fijos de la siguiente manera [8]:

1. Repulsores (también llamados fuentes): ambos valores propios tienen una parte real positiva.
2. Atractores (también llamados sumideros): ambos valores propios tienen una parte real negativa.
3. Puntos silla: un valor propio es positivo y otro negativo.

A continuación se resumen los resultados de este análisis tomando $\alpha = 0,5$ y $f = 1$.

| PUNTO FIJO | ESTABILIDAD | CONDICIÓN con $\alpha = 0,5$ y $f = 1$ |
|---------------|----------------|---|
| p_1 | punto silla | ninguna |
| p_2 | nodo estable | ninguna |
| p_3 y p_4 | nodo inestable | \exists si $0 < \gamma \leq 0,06$ |
| p_5 y p_6 | punto silla | ninguna |

Cuadro II. Condición de existencia y tipo de estabilidad de los puntos fijos cuando $\alpha = 0,5$ y $f = 1$.

Los puntos fijos p_5 y p_6 se clasificaron estudiando el signo de la traza τ y el determinante Δ de la matriz J. Strogatz [8] explica que:

1. Cuando $\Delta < 0$ los valores propios son reales y tienen signo opuesto. Por lo tanto, el punto fijo es un punto silla.
2. Si el punto fijo es un nodo entonces $\Delta > 0$ y se satisface $\tau^2 - 4\Delta > 0$. La estabilidad del nodo está determinada por τ : para $\tau < 0$, puesto que los valores propios son negativos, el nodo es estable. Por el contrario, si $\tau > 0$ significa que el nodo es inestable.

Para $p_{5,6} = (E^*, C^*)$ se cumple:

$$\tau = [fg + 2(\alpha + 1)]C^* - [\gamma + gC^* + \alpha + 3C^{*2}] < 0$$

cuando $[fg + 2(\alpha + 1)]C^* < \gamma + gC^* + \alpha + 3C^{*2}$ y

$$\Delta = -(\gamma + gC^*)\{[fg + 2(\alpha + 1)]C^* - (3C^{*2} + \alpha)\} - fC^*g(\gamma + gC^*) > 0$$

siempre que $[f \cdot g + 2(\alpha + 1)]C^* < 3 \cdot C^{*2} + \alpha$

Tomando $\alpha = 0,5$ y $f = 1$ al evaluar p_5 se obtiene:

$$C^* = \frac{(1,5+g) + \sqrt{(1,5+g)^2 - 2}}{2}$$

Para todo g positivo, si $0,2 < C^* < 0,8$, el punto fijo es un punto silla.

Por otro lado, si $0 < C^* < 0,2$ ó $0,8 < C^* < 1$ la estabilidad depende del signo de τ . Para dichos valores de C^* , τ es positivo con independencia del valor de g , por lo que el punto fijo es una silla también en este caso.

Un estudio similar se puede realizar con p_6 y concluir que para $\alpha = 0,5$ y $f = 1$ también es un punto silla.

Para construir el espacio de fases E-C y determinar el comportamiento del campo vectorial en el entorno de los puntos fijos, es conveniente determinar primero las curvas de igual pendiente o "isoclinas". Para encontrar las isoclinas escribimos (tomando $\alpha = 0,5$ y $f = 1$):

$$\frac{dE}{dt} = E[(\gamma - E) + gC] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{dC}{dt} = C[(0,5 - C)(C - 1) + (E - \gamma)] = 0 \quad (9)$$

Las E-isoclinas son las curvas que unen los puntos en los que $\frac{dE}{dt} = 0$ (pendiente vertical). Análogamente, la C-isoclinas son las curvas que unen los puntos en los que $\frac{dC}{dt} = 0$ (pendiente horizontal).

El primer conjunto de isoclinas son los ejes y se obtienen igualando a cero E y C en las ecuaciones 8 y 9, respectivamente. Si consideramos el eje E, se puede ver que $\frac{dE}{dt}$ es positivo cuando $\gamma > E$ y negativo cuando $\gamma < E$. En cuanto al eje C, el valor de $\frac{dC}{dt}$ es negativo para cualquier valor de $\gamma > 0$.

El otro conjunto de isoclinas proviene de igualar a cero los términos con paréntesis recto en las ecuaciones 8 y 9. La isoclina de E es la parábola $C^2 - 1,5C + (0,5 + \gamma) = E$.

Estudiando el signo de $\frac{dE}{dt}$ surge que es positivo tanto si $\gamma > E$ como si $\gamma < E$ al tiempo que $(\frac{\gamma - E}{g}) < C$. Por

otra parte, $\frac{dE}{dt}$ es negativo cuando $\gamma < E$ y $(\frac{\gamma - E}{g}) > C$.

La isoclina para C es la recta $C = \frac{E - \gamma}{g}$; siendo $\frac{dC}{dt}$ positivo para valores de C mayores a 0,5. Para valores de C menores a 0,5 el signo de $\frac{dC}{dt}$ depende de la raíz (C_o) del término $[(0,5 - C)(C - 1) + gC]$ y por lo tanto, es negativo para valores de C menores a C_o y positivo para valores de C mayores a C_o .

Las trayectorias tienen pendiente horizontal cuando atraviesan las C-isoclinas y vertical cuando atraviesan las E-isoclinas, la figura 3 ilustra estas curvas para los valores $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,05$, $g = 0,2$ y $C_o = \frac{(1,5 + g) - \sqrt{(1,5 + g)^2 - 2}}{2}$. Todas las figuras fueron generadas usando el programa pplane.

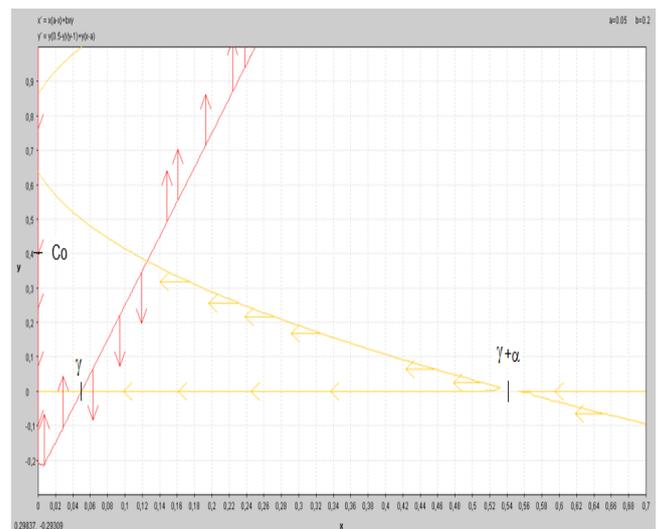


Figura 3. Isoclinas con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,05$, $g=0,2$ y $C_o = 0,4$.

En la figura 4 se muestra el campo vectorial del sistema para los mismos valores de los parámetros.

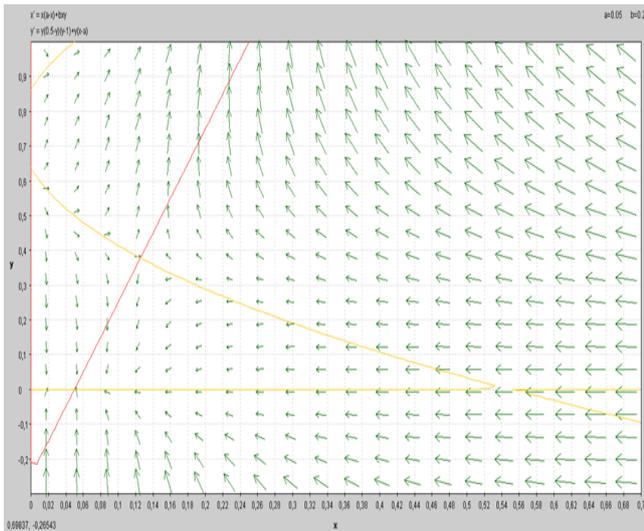


Figura 4. Campo vectorial con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,05$, $g=0,2$ y $C_o = 0,4$.

Los seis puntos fijos se encuentran en los puntos de corte de las isoclinas, incluidos los puntos p_3 y p_4 ya que en este caso elegimos $\gamma < 0,06$.

Para el valor crítico $\gamma_c = 0,06$ se produce una bifurcación tangencial o silla-nodo, por lo tanto, si elegimos $\gamma = 0,1$ (mayor a $0,06$) no aparecen los puntos p_3 y p_4 . El resultado obtenido se muestra en las figuras 5 y 6. Además, para este ejemplo numérico, en la figura 7 se representan los puntos fijos junto con la familia de trayectorias obtenidas suponiendo diferentes condiciones iniciales.

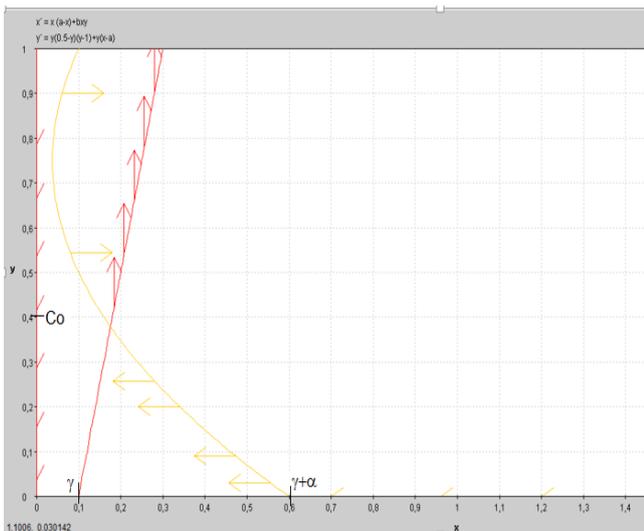


Figura 5. Isoclinas con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,1$, $g=0,2$ y $C_o = 0,4$. No aparecen los puntos fijos p_3 y p_4 .

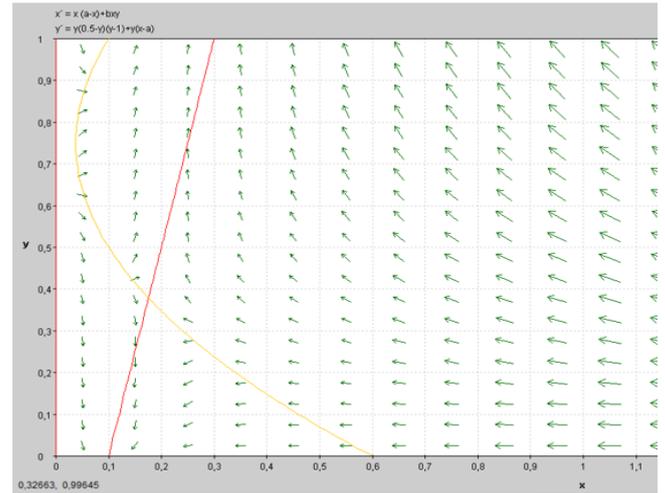


Figura 6. Isoclinas con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,05$, $g=0,2$ y $C_o = 0,4$.

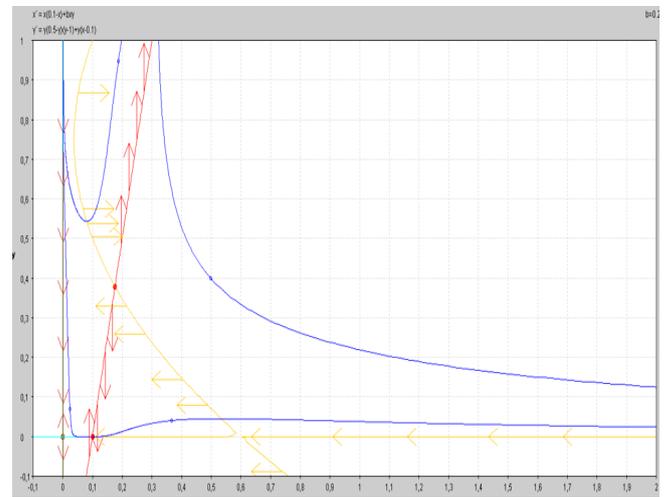


Figura 7. Familia de trayectorias con $\alpha = 0,5$, $\gamma = 0,05$, $g=0,2$ y $C_o = 0,4$.

V. SIMULACIONES NUMÉRICAS

Usando el programa pplane estudiamos la evolución del sistema según diferentes las condiciones iniciales. Las coordenadas (E,C) se grafican (tomando $\alpha = 0,5$ y $\gamma = 0,1$) en dos escenarios. Uno, en donde se supone que la influencia que tiene E sobre C ($f = 1, g = 0,2$). En el otro escenario se asumen $f = g = 1$, idénticas incidencias (de C en E y de E en C). Evaluando la expresión 7 para estos valores de los parámetros, se demuestra que los puntos fijos p_3 y p_4 no existen.

PRIMER ESCENARIO: Aquí $g = 0,2$, $f = 1$, $p_2=(\gamma = 0,1, 0)$, $p_5=(0,18, 0,38)$ y $p_6=(0,36, 1,32)$.

a.1 Elegimos una condición inicial que implica ausencia

del conocimiento previo mínimo necesario y un estado emocional inicial que tiende a incidir negativamente en el desarrollo de la comprensión, es decir, $0 < C < \alpha$ y $E < \gamma$. En este caso hay convergencia al punto fijo estable p_2 . Ver figuras 8 y 9.

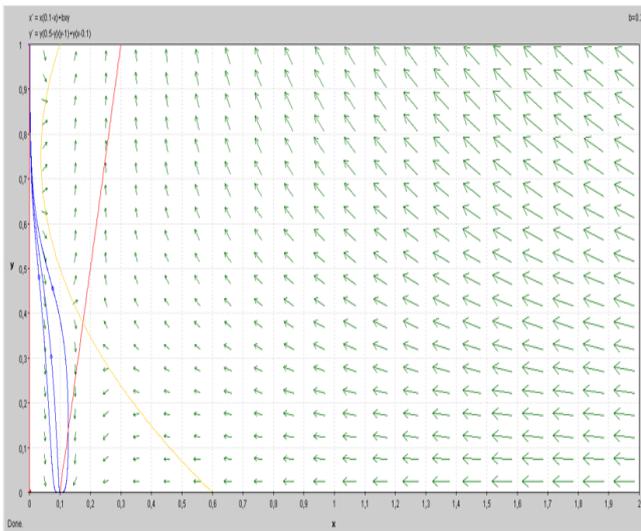


Figura 8. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = 0,2$ y $f = 1$ con condiciones iniciales tales que $0 < C < 0,5$, $E < 0,1$.

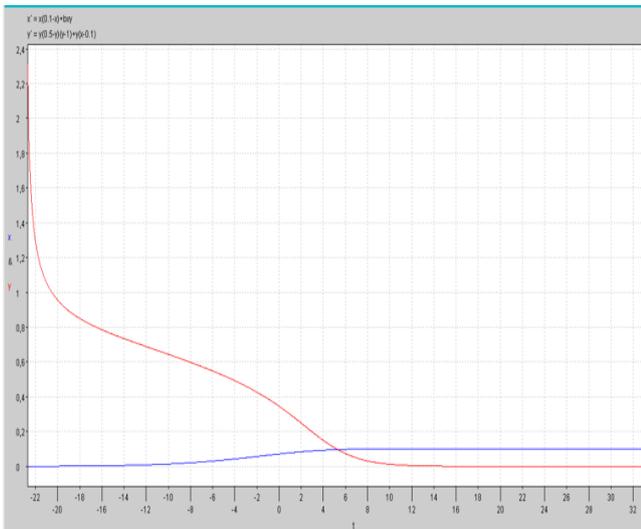


Figura 9. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,07$, $C = 0,35$).

a.2 Las figuras 10 y 11 muestran la evolución del sistema para el caso en que el aprendiz inicialmente carece de los conocimientos previos necesarios ($0 < C < \alpha$) pero su estado emocional favorece el aumento de la comprensión ($E > \gamma$). Como vemos, si partimos de la región que se encuentra a la derecha de la E-isoclina (representada en amarillo) se alcanza el punto silla p_6 .

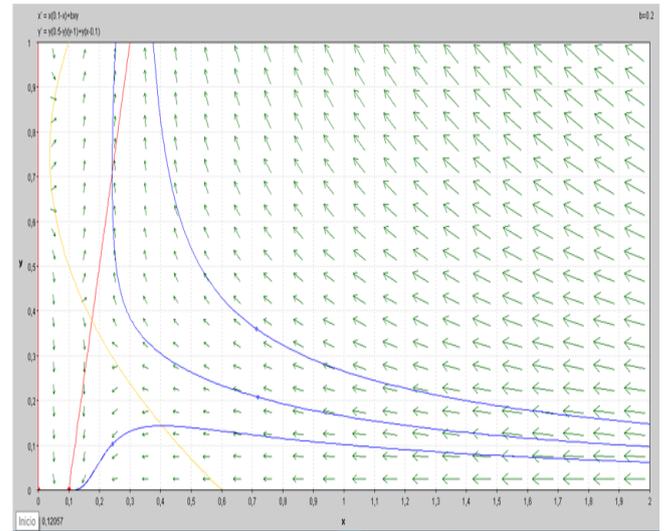


Figura 10. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = 0,2$ y $f = 1$ con condiciones iniciales tales que $0 < C < 0,5$, $E > 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

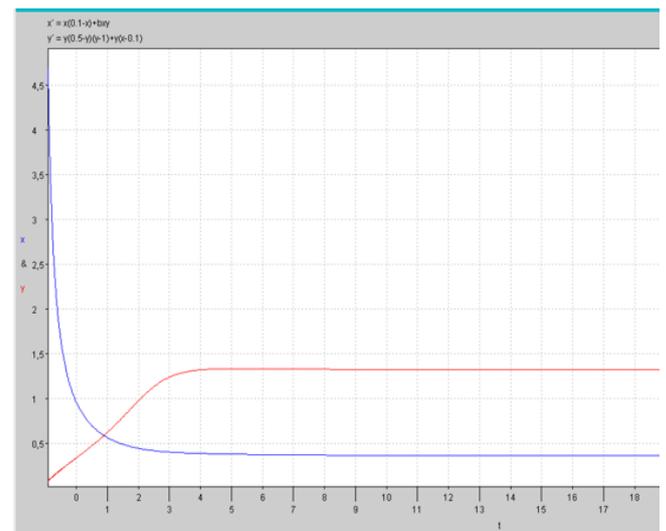


Figura 11. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,96$, $C = 0,34$).

Obsérvese en la figura 10 que si elegimos como condición inicial un punto ubicado a la izquierda de la E-isoclina el sistema converge al punto estable p_2 .

b.1 En las figuras 12 y 13 se asume que, inicialmente, el aprendiz sí cuenta con suficientes conocimientos previos ($C > \alpha = 0,5$) pero su estado emocional incide negativamente en la comprensión ($E < \gamma$).

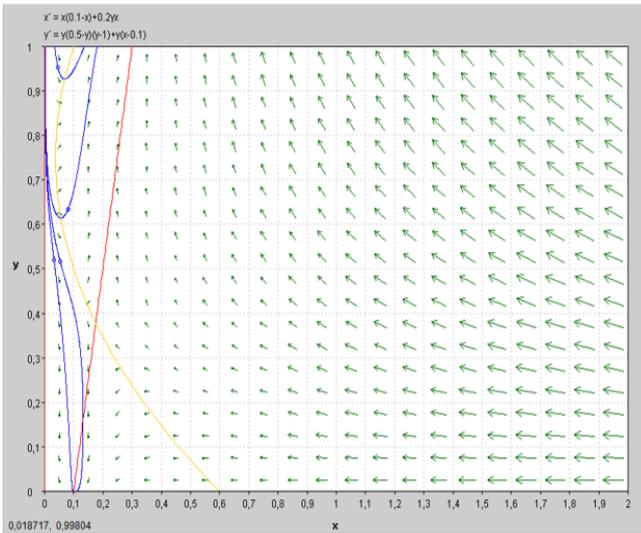


Figura 12. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = 0,2$ y $f = 1$ con condiciones iniciales tales que $C > 0,5$, $E < 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

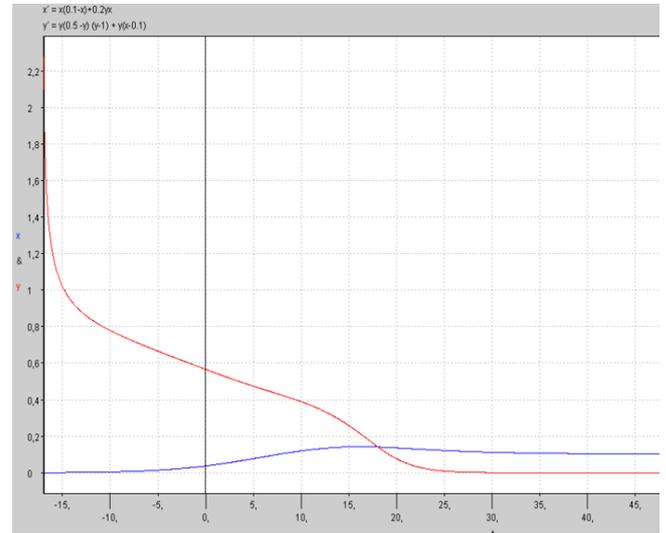


Figura 14. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,04$, $C = 0,57$).

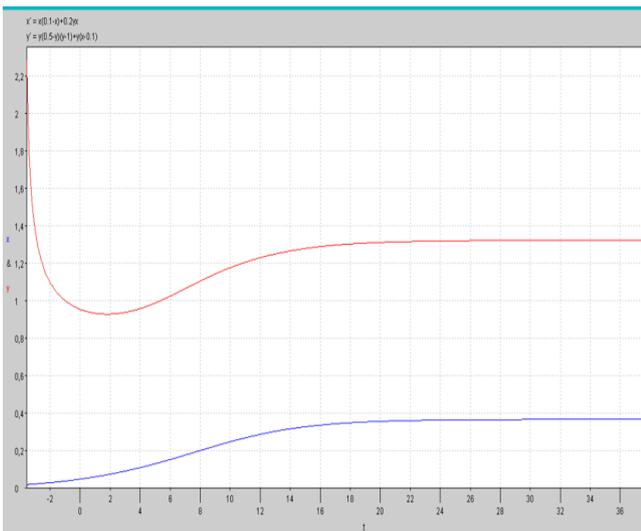


Figura 13. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,07$, $C = 0,74$).

Como se puede ver, cuando el punto de partida se encuentra a la derecha de la E -isoclina se alcanza el punto silla p_6 . Por otro lado, en la figura 14 vemos que si partimos de un estado inicial ubicado a la izquierda de la E -isoclina, en donde E es muy chico, la variable C evoluciona de una forma totalmente diferente y el sistema converge a p_2 .

b.2 Al inicio el aprendiz cuenta con los conocimientos previos mínimos ($C > \alpha = 0,5$) y su estado emocional favorece el aumento de la comprensión ($E > \gamma$). Ver figuras 15 y 16. Para estas condiciones también se alcanza el punto silla p_6 .

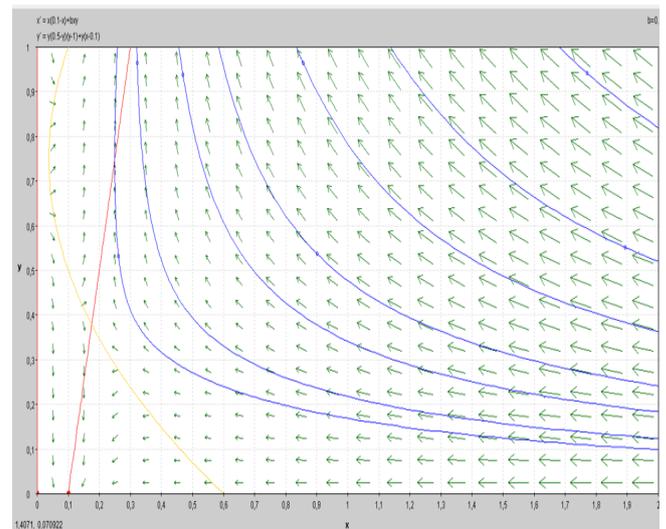


Figura 15. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = 0,2$, $f = 1$ y condiciones iniciales tales que $C > 0,5$ y $E > 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

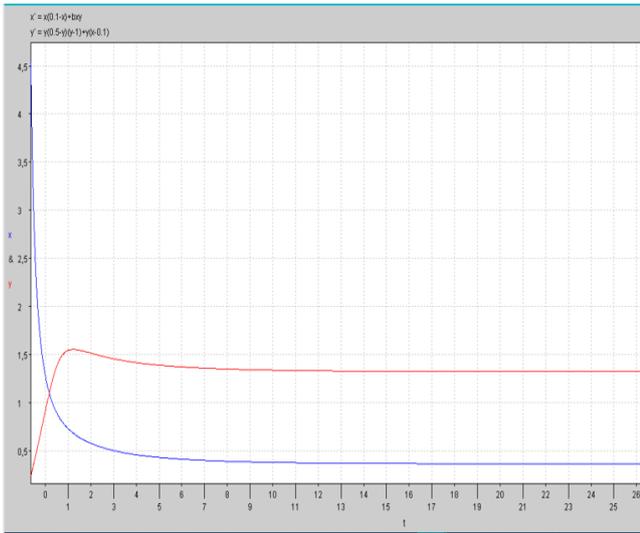


Figura 16. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 1,28, C = 0,91$).

SEGUNDO ESCENARIO: Aquí $g = f = 1$, $p_2 = (\gamma = 0,1, 0)$, $p_5 = (0,33, 0,23)$ y $p_6 = (2,38, 2,28)$.

a.1 Elegimos $0 < C < \alpha$ y $E < \gamma$. En este caso el aprendiz carece de los conocimientos previos necesarios y su estado emocional retrasa el aumento de la comprensión. Como muestran las figuras 17 y 18, partiendo de estas condiciones iniciales, hay convergencia al punto fijo estable p_2 .

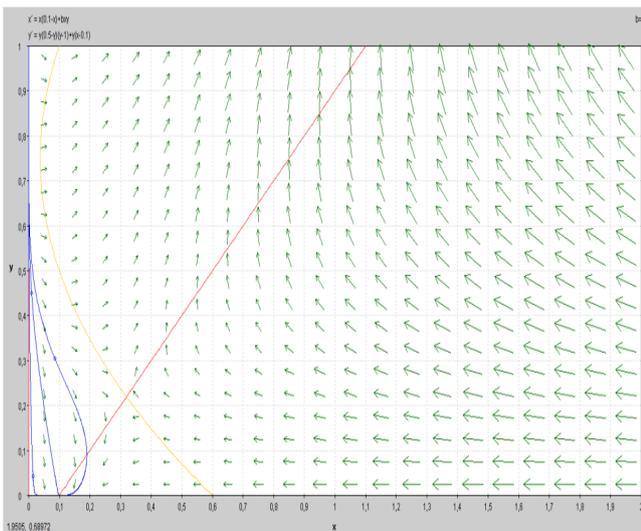


Figura 17. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = f = 1$ y condiciones iniciales tales que $0 < C < 0,5$, $E < 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

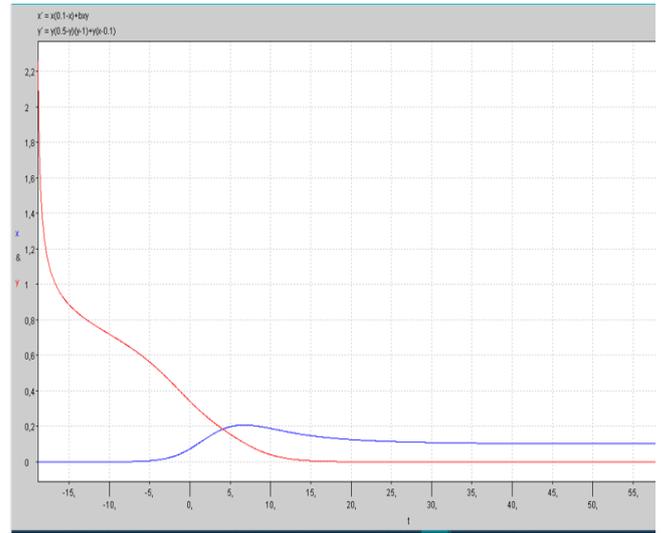


Figura 18. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,07, C = 0,34$).

a.2 En este caso, el estudiante no cuenta con los conocimientos mínimos ($0 < C < \alpha$) pero su estado emocional favorece el incremento en la comprensión ($E > \gamma$) y el sistema alcanza el punto silla p_6 como vemos en las figuras 19 y 20. Cabe destacar que esto no ocurre si la condición inicial se encuentra en la región que se forma entre la isocline roja y la isocline amarilla, en donde C es pequeño y el valor de E es apenas mayor que γ . En esas circunstancias el sistema converge al punto fijo p_2 .

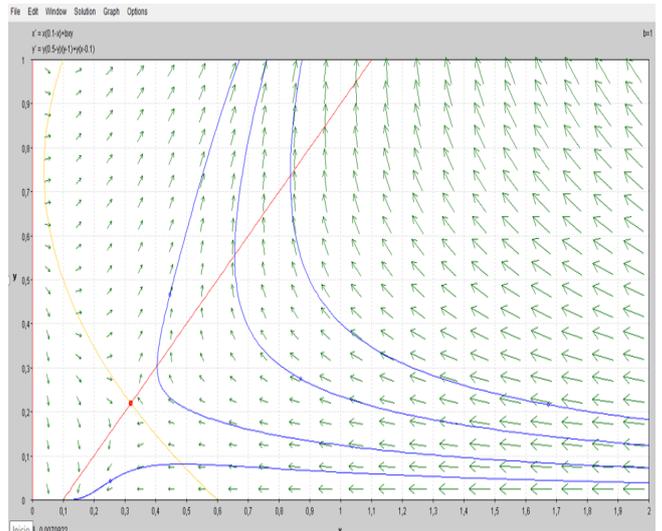


Figura 19. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g=f=1$ y condiciones iniciales tales que $0 < C < 0,5$, $E > 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

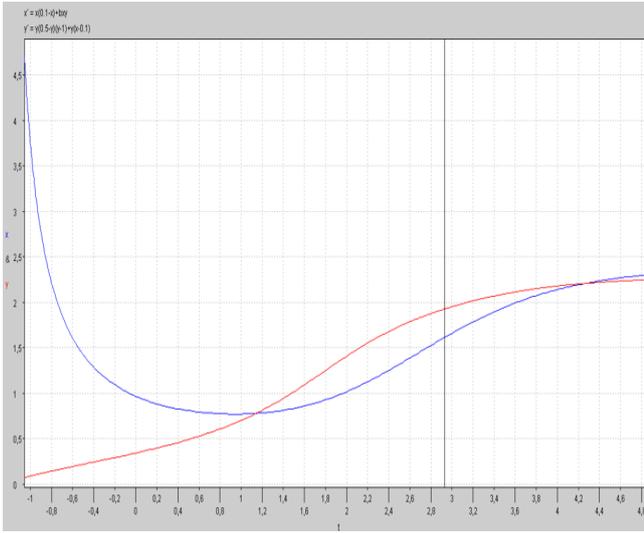


Figura 20. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,97, C = 0,34$).

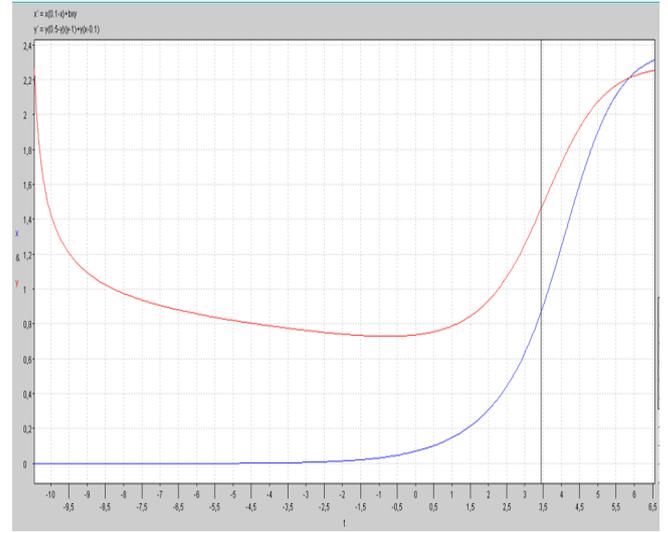


Figura 22. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 0,07, C = 0,74$).

Para los estados de partida considerados a continuación también se alcanza el punto silla p_6 .

b.1 Al inicio el aprendiz cuenta con suficientes conocimientos previos ($C > \alpha = 0,5$) pero su estado emocional no contribuye a que logre mayor comprensión ($E < \gamma$). Ver figuras 21 y 22.

b.2 Al inicio el aprendiz cuenta con suficientes conocimientos ($C > \alpha = 0,5$) y su estado emocional favorece el aumento de la comprensión ($E > \gamma$); las figuras 22 y 23 muestran cómo evoluciona el sistema.

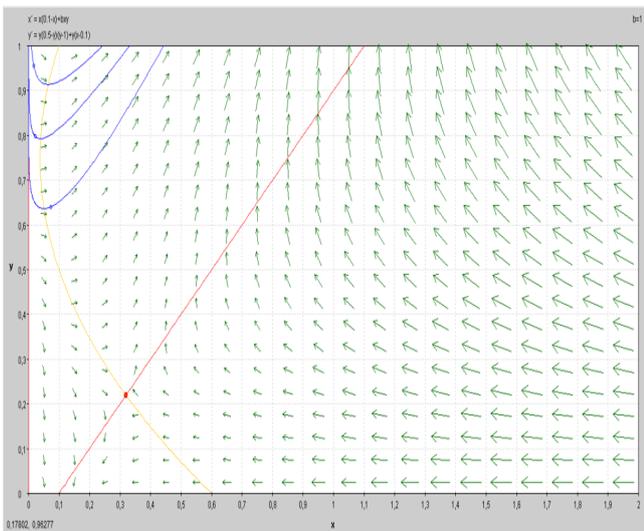


Figura 21. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g=f=1$ y condiciones iniciales tales que $C > 0,5, E < 0,1$.

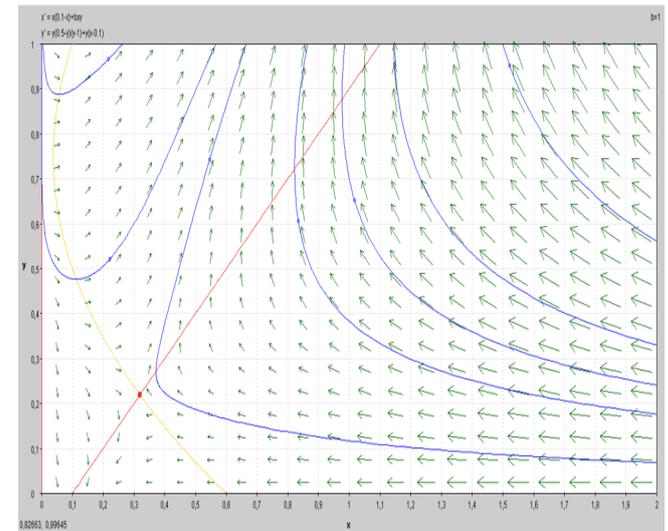


Figura 23. Retrato de fase y familia de trayectorias, para $g = f = 1$ y condiciones iniciales tales que $C > 0,5, E > 0,1$. El punto azul en las trayectorias marca donde iniciaron.

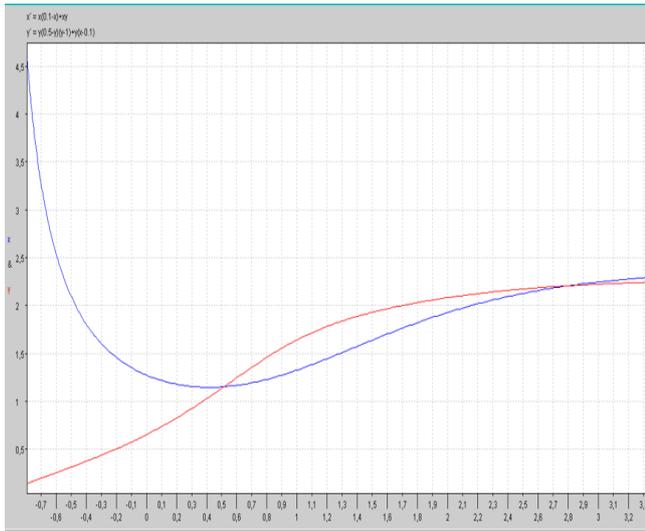


Figura 24. Evolución temporal de $E(t)$ en azul y $C(t)$ en rojo, dada la condición inicial ($E = 1,27, C = 0,65$).

VI. DISCUSIÓN

1. NO HAY APRENDIZAJE: C TIENDE A 0.

El punto fijo p_2 se alcanza desde las condiciones iniciales ($E = 0,07, C = 0,35$) y ($E = 0,04, C = 0,57$) cuando la influencia que C realiza sobre E predomina sobre la que E ejerce sobre C ; y desde ($E = 0,07, C = 0,34$) cuando la fortaleza de la interacción es igualmente significativa en la evolución de ambas variables. Es decir, que en los casos antes mencionados, el estudiante llega al final del proceso sin haber aumentado su comprensión de lo estudiado y con una predisposición hacia el saber, similar a la que se supone debería tener al inicio.

De lo anterior se deriva que cuando al inicio del proceso no se tienen los conocimientos mínimos necesarios para aprender un nuevo contenido, en los dos escenarios considerados y con independencia de si el estado emocional actúa o no a favor del aprendizaje, existe la posibilidad de que que no éste no ocurra.

Asumiendo que la influencia que C realiza sobre E predomina sobre la que E ejerce sobre C , tampoco se logra un proceso de aprendizaje exitoso si el estudiante tiene un conocimiento previo apenas suficiente y un estado emocional que no favorece el aprendizaje.

2. HAY APRENDIZAJE: AUMENTA C.

El punto silla p_6 se alcanza desde las condiciones iniciales ($E = 0,96, C = 0,34$), ($E = 0,07, C = 0,74$) y ($E = 1,28, C = 0,91$) cuando la influencia que C realiza sobre E predomina sobre la que E ejerce sobre C ; y desde ($E = 0,97, C = 0,34$), ($E = 0,07, C = 0,74$), ($E = 1,27, C = 0,65$) cuando la fortaleza de la interacción es igualmente significativa en la evolución de ambas variables.

Cabe recordar que p_6 adopta valores diferentes en cada escenario, siendo $p_6 = (0,36, 1,32)$ en el primero y $p_6 = (2,38, 2,28)$ en el segundo; ambos valores revelan que se alcanzó una comprensión mayor a la máxima posible si no se tiene en cuenta la interacción $C-E$. Asimismo, el valor de E es mayor a γ , de modo que las emociones favorecen el proceso de aprendizaje.

Si asumimos que la influencia que C realiza sobre E predomina sobre la que E ejerce sobre C y el estado emocional es favorable al aprendizaje, dependiendo del valor inicial de la variable C , podemos ver que la variable E evoluciona en forma diferente. Cuando al inicio C es mucho menor que α , E tiende a γ ; si el valor inicial de C es cercano a α , E tiende a un valor mayor que γ aunque menor que el inicial; y finalmente, E disminuye o se mantiene constante cuando el conocimiento previo supera al mínimo α .

VII. CONCLUSIÓN

En este trabajo se aplicó un enfoque de sistemas dinámicos para analizar cómo las emociones influyen en el proceso de aprendizaje. Considerando que los valores de los parámetros de f , g , α y γ caracterizan la interacción entre comprensión y emociones durante el proceso de aprendizaje, mirando las figuras 10-24 que ilustran las simulaciones numéricas realizadas, podemos responder algunas preguntas para los valores de los parámetros que se estudiaron ($f = 1, \alpha = 0,5$ y $\gamma = 0,1$).

1. ¿Es suficiente que las emociones sean favorables para que se produzca aprendizaje?

De acuerdo a lo estudiado, cuando E tiene poco peso en la interacción (o lo que es lo mismo, $g=0,2$) si el valor inicial de E es menor a cierto valor y si además, no se tienen los saberes mínimos, el aprendizaje no se logra aun cuando las emociones lo favorezcan.

Si ahora consideramos un peso equivalente de E y C en la interacción ($f=g=1$), cuando al comienzo E es apenas superior al mínimo esperado (γ) y además se está muy por debajo del nivel de conocimientos necesarios para incorporar un nuevo saber, el proceso de aprendizaje tampoco es exitoso; en este contexto la acción de las emociones a favor del proceso no es suficiente para que el estudiante aprenda.

2. ¿Existe la posibilidad de que se inicie el proceso de aprendizaje con los saberes necesarios, pero que las emociones actúen obstaculizándolo de forma tal que finalmente no se logren buenos resultados?

Los resultados sugieren que eso puede ocurrir en el primer escenario ($g=0,2$) cuando un estudiante comienza

el proceso de aprendizaje con un conocimiento apenas superior al mínimo requerido ($0,5 < C < 0,6$) y el valor inicial de E es mucho menor al mínimo esperado (γ).

3. ¿Las emociones juegan un papel relevante en el proceso de aprendizaje?

Como ya se mencionó, converger al punto silla p_6 es un signo de que el proceso de aprendizaje ha sido exitoso. Como es esperable, a este punto se puede llegar (en los dos escenarios estudiados) si la condición inicial es favorable tanto en lo relativo a lo académico, como a lo emocional ($C > \alpha$ y $E > \gamma$). Sin embargo, lo interesante es que a este punto también se llega aunque la condición de partida no sea favorable en uno de los dos aspectos. Por consiguiente, las emociones cuando actúan a favor del aprendizaje, permiten compensar la falta de conocimientos previos.

REFERENCIAS

- [1] SIAM, “SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems. Description.” Accedido el 23 11 2020 . URL <https://archive.siam.org/meetings/ds13/>, 2013.
- [2] D. E. Pritchard, Y.-J. Lee, and L. Bao, “Mathematical learning models that depend on prior knowledge and instructional strategies,” *Physical review special topics-physics education research*, vol. 4, no. 1, p. 010109, 2008.
- [3] L. Monteiro and P. Notargiacomo, “Learning process as an interplay between understanding and doubt: a dynamical systems approach,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 47, pp. 416–420, 2017.
- [4] F. McNeil, *Learning with the brain in mind*. Sage, 2008.
- [5] N. Sanmartí, *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria*. Síntesis, 2002.
- [6] E. Jensen, *Cerebro y aprendizaje: competencias e implicaciones educativas*. Narcea Ediciones, 2004.
- [7] AE, “El aprendizaje inconsciente se encuentra relacionado con las regiones más antiguas del cerebro,” Accedido el 1 9 2020 . URL <https://asociacioneducar.com/aprendizaje-inconsciente-regiones-antiguas>, 201.
- [8] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.