

PRÁCTICO 1 - RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN LA RECTA

1. Resuelva (i.e. halle la solución general de)

a) $x' = x^2$;

b) $x' = e^{t-x}$.

En ambos casos discuta el dominio *maximal* de la soluciones en función del valor inicial $x(0)$. Por ejemplo, la solución de 1a dada por $x(t) = \frac{1}{1-t}$ tiene como valor inicial $x(0) = 1$ y está definida para todo $t < 1$, por lo tanto el dominio maximal de dicha solución es $(-\infty, 1)$.

2. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $\begin{cases} x' = \frac{3t^2+4t+2}{2(x-1)} \\ x(0) = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = te^{t+x} \\ x(2) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3tx' = x \cos t \\ x(1) = 0 \end{cases}$

3. Compruebe que la sustitución $y = at + bx$ transforma la ecuación diferencial

$$x' = f(at + bx)$$

en una ecuación de variables separables. Usando ese truco resuelva

$$x' = \sin^2(t - x).$$

4. Muestre que el cambio de variable $y = x/t$ transforma las ecuaciones del tipo

$$x' = f(x/t)$$

en una de variables separables. Usando esa observación resuelva

$$x' = e^{x/t} + x/t.$$

5. Halle las soluciones $x(t)$ de

$$e^{3t}x' = -(3e^{3t}x - 2t).$$

6. Decimos que una ecuación de la forma

$$m(t, x) + n(t, x)x' = 0, \tag{1}$$

con $m, n : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, tiene factor integrante si existe una función continua $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la ecuación

$$\mu(t, x)m(t, x) + \mu(t, x)n(t, x)x' = 0 \tag{2}$$

es exacta.

a) Observar que toda solución de la ecuación (1) es una solución de (2). Además, si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación (2) y $\mu(t, \varphi(t)) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces φ es solución de (1).

b) Mostrar que la ecuación

$$(x^3 + tx^2 + x) + (t^3 + t^2x + t)x' = 0$$

no es exacta pero posee un factor integrante y resolverla. Sugerencia: buscar un factor integrante de la forma $\mu(t, x) = t^\alpha x^\beta$.

7. El calor intercambiado por un gas monoatómico ante variaciones de temperatura dT y volumen dV es en general

$$\delta Q = \frac{3}{2}nR dT + \frac{nRT}{V} dV$$

que no es una diferencial (1-forma) exacta. Halle un factor integrante $f(T)$ tal que $f(T)\delta Q$ sea la *diferencial* (derivada exterior) de una cierta función $S(V, T)$.

8. a) Halle una solución particular para cada una de las siguientes ecuaciones,

1) $x' + 2x = e^t$

2) $x' + x = te^t$

3) $x' + t^2x = t^2$

4) $x' = x + t^4 + 2t^3 + t + 2$

5) $x' = x + 3 \sin t$

6) $x' + x \cos t = \sin t \cos t$

b) Encuentre la solución general de la ecuación homogénea asociada a cada una de las ecuaciones anteriores.

c) Escriba la solución general de cada una.

9. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales.

a) $x' = 3x; x(0) = 1$

b) $x' = (\sin t)x; x(0) = 2$

c) $x' = \sin 2t + x \cos t; x(0) = 1$

d) $x' = 2x + e^{-2t}; x(0) = 1$

e) $tx' - 2x = t^5; x(1) = 1$

f) $x'' + 4t' + 5x = 0; x(0) = 1, x'(0) = 0$

g) $x'' + 8x' - 9x = 0; x(1) = 2, x'(0) = 0$

10. ECUACIÓN DE BERNOULLI - Las ecuaciones de Bernoulli son de la forma

$$x' + A(t)x = B(t)x^n \tag{3}$$

con n diferente de 0 y 1 (en cuyo caso la ecuación es lineal).

Compruebe que el cambio $u = x^{1-n}$ convierte (3) en la ecuación lineal

$$u' + (1-n)Au = (1-n)B$$

Usando esa observación resuelva

$$x' = (x/t + t^2/x)/2.$$

11. ECUACIÓN DE RICCATI - La ecuación de Riccati tiene la forma general,

$$y' + A(x)y + B(x)y^2 = C(x) \quad (4)$$

con $B(x) \neq 0$. No hay un método general para resolver este tipo de ecuaciones. Sin embargo es posible hallar la solución general si se conoce una solución particular.

Muestre que si se hace el cambio de variable $y = y_1 + 1/v$ en (4) siendo y_1 una solución particular, la función $v(x)$ cumple la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dv}{dx} = [A(x) + 2B(x)y_1(x)]v(x) + B(x)$$

Usando esa observación resuelva la siguiente ecuación de Riccati a partir de la solución particular indicada:

$$y' = e^{2x} + (1 - 2e^x)y + y^2, \quad y_1 = e^x$$

12. Encuentre las curvas $y(x)$ tales que la línea tangente a la curva en el punto $(x, y(x))$ corta el eje Ox en la coordenada $x/2$.

13. Un cuerpo de temperatura $180^\circ C$ es inmerso en un líquido a temperatura constante $60^\circ C$. En un minuto la temperatura del cuerpo decrece a 120° grados. ¿Cuánto le tomará al cuerpo llegar a $90^\circ C$?
Recordar la ley de enfriamiento de Newton: la tasa a la cual un cuerpo cambia de temperatura es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.

14. El tiempo de vida medio del radio en un trozo de plomo es de 1500 años. ¿Qué remanente de radio quedará al cabo de 2500 años?

La ley de decaimiento radiactivo establece que el número de núcleos radiactivos, N , tiene una tasa proporcional a N . El tiempo de vida medio es el tiempo necesario para que N se reduzca en un factor $1/e$.

15. Un cuerpo de masa m kg se libera desde una altura de 500 m. La fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad $m/40$ kgm/s². Halle la velocidad y la distancia recorrida en t segundos. 2

16. Un cuerpo en el espacio exterior se encuentra en reposo a distancia r_0 del centro de la Tierra. Halle:

- a) la velocidad v del cuerpo como función de la distancia r al centro de la tierra;
- b) la velocidad cuando alcanza la superficie de la Tierra;
- c) el tiempo transcurrido t como función de la distancia recorrida.

Expresa los resultados en función de la constante gravitacional G , la masa de la Tierra M y el radio de la Tierra R , sin explicitar sus valores.