

PRÁCTICO 2 - EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES, SOLUCIONES MAXIMALES

1. Pruebe que para cada $c > 0$, $x_c(t)$ definida por,

$$x_c(t) := \begin{cases} (t-c)^3 & t \geq c \\ 0 & t \leq c \end{cases}$$

es solución al problema de valores iniciales,

$$x' = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0,$$

¿Por qué no vale el teorema de Picard?

2. Considere el problema de valores iniciales

$$x' = f(x), \quad x(0) = 1$$

con $f(x) = \sin x^2$.

- a) Encuentre una constante de Lipschitz para f en algún entorno de 1.
 - b) Pruebe que el problema de valores iniciales tiene una solución única en algún entorno de $(0, 1)$.
 - c) Usando el teorema de escape de compactos muestre que el intervalo maximal de la solución es $\mathbb{R}$. (Sugerencia: obtenga las soluciones constantes de la ecuación diferencial.)
3. Encuentre las iteradas de Picard $x_k(t)$ para los siguientes problemas de valores iniciales:
- a) $x' = x - 1$, $x(0) = 1$, partiendo de $x_0(t) = 0$ y $x_0(t) = 1$
 - b) $x' = 2t(x - 1)$, $x(0) = 2$ partiendo de $x_0(t) = 2$,
 - c) $x' = tx$, $x(0) = 1$ partiendo de $x_0(t) = 1$ y $x_0(t) = t$.

En todos los casos determine la solución al problema de valores iniciales como el límite de las funciones iteradas. Verifique que ellas coinciden con las soluciones explícitas que se encuentran resolviendo ambas ecuaciones en variables separables.

4. Considere la ecuación diferencial

$$x' = \cos(t + x).$$

- a) Encuentre las soluciones de la forma $x(t) = at + b$.
 - b) Pruebe que existe una única solución para cada condición inicial cuyo intervalo maximal es $\mathbb{R}$.
 - c) Determine el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión y bosqueje las soluciones.
5. Considere la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x + b(t)$$

donde $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ y $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos funciones continuas y acotadas.

- a) Usando el teorema de Picard pruebe que existen una única solución para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$.
- b) Pruebe que la función $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ es globalmente Lipschitz en la segunda variable.
- c) Pruebe que el intervalo maximal de cualquier solución es $\mathbb{R}$.
6. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^∞ . Para $i = 1, 2$ supongamos que $\varphi_i : I_i \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de $x' = f_i(t, x)$, y que existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Probar que si $f_1(t, x) \leq f_2(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ para todo $t > t_0$, y $\varphi_1(t) \geq \varphi_2(t)$ para todo $t < t_0$.
7. Probar que las soluciones de la ecuación $x' = x^2 + t^2$ están definidas solamente en intervalos acotados. (Sugerencia: usar el ejercicio anterior.)
8. Consideramos la ecuación diferencial $x' = t - x^2$.
- a) Encontrar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.
- b) Probar que para toda solución φ existe $T \geq 0$ tal que $\varphi(t) < \sqrt{t}$ para todo $t \geq T$.
- c) Para cada $c \in \mathbb{R}$ sea φ_c la solución maximal con $\varphi_c(0) = c$. Probar las siguientes afirmaciones:
- Si $c \geq 0$, entonces φ_c está definida para todo $t \geq 0$.
 - Existe $k < 0$ tal que para todo $c < k$ la solución φ_c tiende a $-\infty$ en tiempo finito.
 - Existe un valor c_0 tal que φ_{c_0} está definida para todo $t \geq 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi_{c_0}(t) - \sqrt{t}) = 0.$$

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

9. Probar que si $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función localmente Lipschitz y K es compacto, entonces f es Lipschitz.
10. Calcular la distancia respecto a la norma del supremo entre las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ para los siguientes casos,
- $f(x) = x^n$, $g(x) = x^m$ con $n, m \in \mathbb{N}$
 - $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$.
11. De las siguientes sucesiones de funciones, hallar si son puntual o uniformemente convergentes,
- $\{f_n : n \geq 1\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es:
- $$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
- $\{f_n : n \geq 1\}$ donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = x^n$.
 - $\{f_n : n \geq 1\}$ donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_n(x) = \sin(x + n\pi)$
12. ¿El espacio de las funciones C^1 de $(0, 1)$ en $[-1, 1]$ es completo con la norma del supremo?