

PRÁCTICO 3 - ECUACIONES LINEALES

1. Probar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, entonces se cumple

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Sugerencia: Usar las sumas de Riemann y el hecho de que la raíz cuadrada es sub-aditiva, es decir que cumple $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (para $x, y \geq 0$).

2. Encuentre el máximo dominio de definición de la solución general de las siguientes ecuaciones. Verificar si son o no continuas.

- $x' = x^2$.
- $x' = \frac{t}{1-x^2}$.
- $x' = \frac{x}{t}$.

3. Escriba las siguientes ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$ como ecuaciones lineales de primer orden en una dimensión mayor.

- $x'' + 4x = 0$
- $x'' - e^t x' + x = \cos(t)$.
- $x''' + tx'' - 5x = \log(t)$

4. Consideramos en el espacio de matrices $M_n(\mathbb{R})$ la siguiente norma:

$$\|A\| = \sup \{ \|Av\| : v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1 \}.$$

- a) Verificar que esta expresión efectivamente define una norma. Observar que el supremo es un máximo.
- b) Probar que la norma definida es sub-multiplicativa, es decir que cumple $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para todo par de matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- c) Probar que si $A = (a_{ij})$, entonces se cumple

$$\frac{1}{n} \|A\| \leq \max_{ij} |a_{ij}| \leq \|A\|.$$

- d) Concluir que $M_n(\mathbb{R})$ es completo con la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|$, y que una función $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ (con I un intervalo en $\mathbb{R}$) es continua con esta norma si y solo si todos sus coeficientes son continuos.
5. a) Consideramos la ecuación lineal homogénea $\dot{x} = A(t)x$, donde $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ es continua. Probar que el conjunto de soluciones

$$\mathcal{S}_H = \{ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n : \dot{\varphi} = A(t)\varphi \}$$

es un espacio vectorial de dimensión n .

- b) Sea ahora $\mathcal{S}$ es el conjunto de soluciones de la ecuación no homogénea $\dot{x} = A(t)x$. Probar que si $\varphi_p \in \mathcal{S}$, entonces

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \varphi \mathcal{S}_H = \{\varphi + \varphi_p : \varphi \in \mathcal{S}_H\}.$$

6. Hallar la solución general y dibujar el diagrama de fase de los siguientes sistemas,

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -y \end{cases}$$

7. Hallar e^{tA} en los siguientes casos encontrando una decomposición de la forma $A = BDB^{-1}$ con B una matriz de cambio de base y D una matriz de la forma $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$ o $D_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ siendo λ y μ reales.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Sea el sistema

$$a) \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

a) Probar que si $\phi(t) = (x(t), y(t))$ es solución de la ecuación entonces $x^2(t) + y^2(t) = cte$.

b) Dibujar el diagrama de fase.

9. Sea A una matriz 2×2 con valores propios reales λ y μ diferentes, y supongamos que $(0, 1)$ y $(-1, 1)$ son los vectores propios asociados respectivamente. Esquematizar el diagrama de fase para los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} 0 < \lambda < \mu, & 0 < \mu < \lambda, & \lambda < \mu < 0 \\ \lambda < 0 < \mu, & \mu < 0 < \lambda, & \lambda = 0 < \mu \end{array}$$

10. Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

11. Hallar la solución general del sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha y \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Hacer un esquema del diagrama de fase para los valores $\alpha = -1, 0, 1$. Observar que la estructura cualitativa del diagrama de fase es la misma para todo $\alpha < 0$, para todo $\alpha > 0$, pero que cambia cuando $\alpha = 0$.

a) Dada una matriz A , probar que si α no es valor propio de A , entonces la ecuación $x' = Ax + e^{\alpha t}b$ tiene una única solución de la forma $x(t) = e^{\alpha t}u$, con $u \in \mathbb{R}^n$. Calcular u en función de A, b y α .

b) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t} \\ y' = x + 2y - e^{2t} \end{cases}$$

12. SISTEMAS MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR.

En un sistema masa-resorte-amortiguador forzado, la posición $x(t)$ del objeto obedece la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F,$$

donde m es la masa del objeto, k es la constante de restitución y c es la constante de amortiguamiento ($k > 0$ y $c > 0$). La fuerza externa F depende solamente de t .

13. MOVIMIENTO AMORTIGUADO. Un pequeño objeto de masa igual a 1 kg se encuentra sujeto a un resorte con constante de restitución igual a 2 N/m. El sistema masa-resorte está inmerso en un medio viscoso con constante de amortiguamiento igual a 3 Ns/m. En el tiempo $t = 0$, la masa se encuentra 1/4 m por debajo de la posición de equilibrio, desde donde es soltada. Demuestre que la masa regresará a la posición de equilibrio conforme t tiende a infinito.
14. MOVIMIENTO AMORTIGUADO FORZADO. Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene una masa de m kg, constante de restitución $k = 9m$ N/m, y constante de amortiguamiento $c = 6m$ Ns/m. La masa parte de la posición de equilibrio en el tiempo $t = 0$ y sobre ella actúa una fuerza externa $F(t) = 3 \sin 3t$ N. El resorte se rompe si es estirado 5 m a partir de su posición de equilibrio. Demuestre que existe una cota inferior en m para que el resorte no se rompa y halle esa cota.

15. MÚLTIPLIS FRECUENCIAS DE RESONANCIA. Cuando a un sistema masa-resorte

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F$$

se le aplica una fuerza periódica sinusoidal $F = F_0 \sin \omega t$, la única frecuencia de resonancia es $\omega = \omega_0$. Si en cambio la fuerza es $F = F_0 \sin^3 \omega t$, que es periódica pero no sinusoidal, hay dos frecuencias ω que producen resonancia. Hállelas, justifique su respuesta. (Sug: use que $\sin^3 \alpha = (\sin 2\alpha - \sin 3\alpha)/4$).

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. ECUACIÓN DE LEGENDRE.

La ecuación

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0,$$

siendo $l \in \mathbb{R}$ un parámetro, aparece frecuentemente al resolver EDPs (por ejemplo la de Laplace) utilizando coordenadas esféricas.

- a) Halle sus soluciones por series de potencias en torno a $x = 0$, escribiendo la relación de recurrencia para los coeficientes.
- b) ¿Para qué valores de l estas soluciones son polinomios?
- c) De los polinomios anteriores, los que cumplen $y(1) = 1$ se denominan polinomios de Legendre. Encuentre algunos de ellos.
- d) *Fórmula de Rodrigues*. Para cada entero positivo n , probar que el polinomio $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ es un Polinomio de Legendre (solución normalizada de la ecuación de Legendre con $l = n$).
- e) Probar la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

2. ECUACIÓN DE HERMITE.

Considerar la ecuación

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

donde λ es un parámetro.

- a) Encontrar expansiones en series de potencias para una base del espacio de soluciones.
- b) ¿Para qué valores de λ las soluciones halladas son polinómicas? Estos polinomios se llaman *polinomios de Hermite* cuando su término de mayor orden tiene coeficiente 2^n .
- c) *Fórmula de Rodrigues*. Para cada entero positivo n , probar que el polinomio $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ es el polinomio de Hermite para la ecuación con $\lambda = 2n$.
- d) Probar la relación de ortogonalidad

$$\int_{\mathcal{R}} H_n(x) H_{n'}(x) e^{-x^2} dx = 2^n \sqrt{\pi} n! \delta_{n,n'}$$

3. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para la función de onda del oscilador armónico (unidimensional) es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi,$$

donde E es un parámetro (que corresponde a la energía del sistema), m a la masa y ω a la frecuencia del oscilador.

- a) Demuestre que, mediante cambios de variable independiente y redefiniciones, puede pasarse a la ecuación adimensionada

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - x^2) \psi = 0$$

con $\epsilon = \frac{E}{E_0}$ y $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

- b) Demuestre que, mediante el cambio de variable dependiente $\psi = e^{-\frac{x^2}{2}} y$, se pasa a la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

con $\lambda = \epsilon - 1$.

- c) Los polinomios de Hermite son la únicas soluciones que hacen que la función de onda $\psi(x) = y(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ sea de cuadrado integrable ($\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx < \infty$). Por lo tanto, son las únicas aceptables como solución del problema físico. ¿Qué implica esto sobre los posibles valores del parámetro E ?