

PRÁCTICO 4 - ECUACIONES AUTÓNOMAS Y ESTABILIDAD

1. Consideramos una ecuación lineal autónoma $\dot{x} = X(x)$, donde X es un campo vectorial localmente Lipschitz definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Recordar que la órbita $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}_X(x)$ de un punto $x \in \Omega$ es la imagen de una solución maximal con condición inicial $(0, x)$.

a) Probar que si $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}(y) \neq 0$, entonces $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. Es decir, dos órbitas diferentes deben ser disjuntas.

b) Sea $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua localmente Lipschitz. Probar que $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y(x) = \rho(x)X(x)$ es un campo localmente Lipschitz, y que para todo $x \in \Omega$ se tiene

$$\mathcal{O}_Y(x) \subset \mathcal{O}_X(x).$$

c) ¿Es cierta la igualdad en parte anterior?

2. Sea x_0 un punto de equilibrio para una ecuación autónoma $\dot{x} = X(x)$ (con $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz). Probar que si existe $x \in \Omega$ tal que $\phi_t(x)$ está definido para todo $t \leq 0$ y $\phi_t(t) \rightarrow x_0$ cuando $t \rightarrow -\infty$, entonces x_0 es inestable.

3. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Considere la ecuación diferencial $x' = f(x)$.

a) Pruebe que, si p es un punto de equilibrio y existe un entorno I_p de p tal que $f(x) > 0$ para $p > x \in I_p$ y $f(x) < 0$ para $p < x \in I_p$, entonces la solución de la ecuación diferencial que cumple $x(0) = x \in I_p$ está definida $\forall t > 0$ y $x(t) \rightarrow p$ cuando $t \rightarrow +\infty$

b) Utilice el criterio anterior para clasificar la estabilidad de los puntos de equilibrio de $x' = x(1-x)$ y los de $x' = \cos(x)$.

4. Consideramos la siguiente ecuación en la recta: $x' = \sin(x)$.

a) Encontrar los puntos de equilibrio y dibujar el diagrama de fase.

b) Estudiar estabilidad y estabilidad asintótica de las trayectorias.

5. Consideramos la ecuación lineal homogénea $\dot{x} = Ax$ con $A \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Observar que si A es invertible, entonces el origen es el único punto de equilibrio de la ecuación. ¿Cuáles son los puntos de equilibrio para en el otro caso?

b) Probar que si $A = PBP^{-1}$ con P invertible, entonces el origen es estable (resp. asintóticamente estable) si y solo si lo es para la ecuación $\dot{x} = Bx$.

c) Estudiar la estabilidad y estabilidad asintótica del origen según los valores propios de A .

d) ¿Qué sucede con la estabilidad y estabilidad asintótica del resto de trayectorias?

6. Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial localmente Lipschitz definido en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ un difeomorfismo. Consideramos el campo $\tilde{X} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\tilde{X}(x) = d_x f \cdot X(f^{-1}(x)).$$

- a) Probar que si φ es solución de $\dot{x} = X(x)$, entonces $f \circ \varphi$ es solución de $\dot{x} = \tilde{X}(x)$. Concluir que si ϕ_t es el flujo para la primera ecuación y $\tilde{\phi}_t$ es el flujo para la segunda, entonces se cumple $\tilde{\phi}_t = f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ (se dice en este caso que los flujos son conjugados).
- b) Probar que x_0 es un punto de equilibrio para $\dot{x} = X(x)$ si y solo si $f(x_0)$ lo es para $\dot{x} = \tilde{X}(x)$, y que x_0 es estable (resp. asintóticamente estable) a futuro o pasado para la primera ecuación si $f(x_0)$ lo es para la segunda.
- c) ¿Es cierto lo anterior para cualquier trayectoria?
- d) Interpretar el ejercicio anterior en términos de este ejercicio.

7. Considere el sistema,

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 2x^3 - 2xy \end{cases} \quad (1)$$

- a) Halle los puntos de equilibrio.
- b) Hallar una preintegral de la forma $H(x, y) = y - x^n$.
- c) Usando el paso anterior dibuje el diagrama de fase.
- d) Estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio.

8. Considere las siguientes funciones $V(x, y)$ de Liapunov,

$$V(x, y) = x^2 + 6xy + y^2; \quad V(x, y) = 7x^2 + xy; \quad V(x, y) = -x^2 + 2xy - y^2; \quad V(x, y) = 1 - e^{x^2} - y^2 \quad (2)$$

Indique en cada caso si, cerca de origen, la función dada es definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa o ninguna de esas posibilidades.

9. Considere el sistema $Y' = AY$ con,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculando los valores propios demuestre que $Y_c = 0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
- b) Encuentre una función de Liapunov definida positiva de la forma $V(Y) = \langle MY, Y \rangle$, (M una matriz simétrica), y tal que $\dot{V}(Y) = -\|Y\|^2$ (en particular con $\dot{V}$ definida negativa).
- c) Pruebe que el punto $(x, y) = (0, 0)$ es un punto asintóticamente estable del sistema,

$$\begin{cases} x' = -x - 4 \sin y, \\ y' = x^2 + 1 - e^y, \end{cases}$$

dando una función de Liapunov V definida positiva con $\dot{V}$ definida negativa, cerca de él (*Sug. Use las partes anteriores*).

10. Use funciones de Liapunov de la forma,

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

para decidir la estabilidad en el origen de cada uno de los siguientes sistemas,

$$\begin{cases} x' = 3xy \\ y' = -x^2 - y^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = -x^3/2 + 2xy^2 \\ y' = -y^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = x + \lambda y \end{cases} \quad (3)$$

En el último caso discuta según el parámetro λ .

11. Consideramos la ecuación del péndulo con rozamiento:

$$\ddot{\theta} = -k \operatorname{sen}(\theta) - \beta \dot{\theta}.$$

- a) Expresar la ecuación como un sistema de primer orden.
- b) Hallar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad y estabilidad asintótica a futuro.