

PRÁCTICO 5 - SERIES DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1. a) Probar que si f es 2π -periódica, y continua a trozos, entonces $|a_n(f)|$ y $|b_n(f)|$ están acotados por arriba por $2\|f\|_\infty$. (Recordar que como f es continua a trozos, y periódica, está acotada.)
b) Supongamos que f es 2π -periódica, y de clase C^1 . Utilizando integración por partes probar que

$$a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f'), \quad b_n(f) = \frac{1}{n}a_n(f').$$

- c) Concluir que si f es 2π -periódica, y de clase C^k entonces

$$\max\{|a_n(f)|, |b_n(f)|\} \leq \frac{2}{n^k} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

- d) Probar que si f es 2π -periódica de clase C^2 , entonces la serie de Fourier converge uniformemente.

2. Demuestre que si $f(x)$ es una función periódica de período $2L$ entonces para todo a la función $f(x-a)$ es periódica de período $2L$. Demuestre que si $f(x)$ es una función periódica de período $2L$ (integrable en intervalos finitos), entonces,

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x)dx = \int_{-L}^L f(x)dx$$

3. Halle la serie de Fourier de $f(x) = \sin(10x)$ como función periódica de período 4π , y la de $f(x) = \sin^2(x)$ como función periódica de período 2π .
4. Considere la función $f(x) = e^x$ para $x \in [-1, 1)$. Extienda dicha función a una de período 2 y calcule su serie de Fourier.
5. Considere la función $f(x) = \sin(x)$ para $x \in [0, \pi]$. Extienda $f(x)$ a una función par de período 2π . Halle su serie de Fourier.
6. Probar que la serie de Fourier de la extensión 2π -periódica de $|x|$ en $[-\pi, \pi]$ está dada por

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos((2j+1)x).$$

Concluir que la serie de Fourier converge uniformemente a la función. ¿Cuál es la serie de Fourier de la extensión 2π -periódica de $\pi/2 - |x|$ en $[-\pi, \pi]$? (Sug: usar linealidad de coeficientes.)

7. Considere la siguiente función,

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - \pi^2) & \text{si } x \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{si } x = -\pi, \pi \end{cases}$$

extendida a una función de período 2π en $\mathbb{R}$.

- a) Determine el máximo $k \geq 1$ tal que f es C^k .
- b) Calcule los coeficientes de la serie de Fourier de f .

c) ¿Qué puede decir acerca de la convergencia de la serie de Fourier?

8. Consideremos la extensión 2π -periódica función f que toma el valor 0 en $[-\pi, 0)$, y el valor 1 en el intervalo $[0, \pi)$. Probar que la serie de Fourier es

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)} \sin(2k-1)x.$$

Evalutando $S(f)$ en $x = \pi/2$, probar la siguiente identidad

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

9. La siguiente función es diferenciable a trozos,

$$f(x) = \begin{cases} (\sin 100x)/x & \text{si } x \in [-\pi, 0), \\ 202 & \text{si } x = 0, \\ \cos 4x & \text{si } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

Extienda $f(x)$ a una función periódica de período 2π . Determine el valor de la series de Fourier en $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$.

10. (Cuerda con púa) Consideremos la función que modela la forma inicial de una cuerda de guitarra al tocarse con púa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p} & 0 \leq x \leq p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p} & p \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Probar usando el desarrollo de Fourier por senos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx) \quad \text{con} \quad A_n = \frac{2h}{n^2} \frac{\sin np}{p(\pi-p)}.$$

b) ¿Para qué posición de p faltan armónicos¹?

c) Encontrar p tal que los armónicos para $n = 2, 4, 6, \dots$ no estén presentes. Análogo pero para los armónicos $n = 3, 6, 9, \dots$

11. Considerar el problema cuya ingónita es una función continua $u : [0, +\infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ que es C^2 en el interior de su dominio:

$$\begin{cases} u_t(t, x) = ku_{xx}(t, x) \text{ para todo } (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ u(0, x) = f(x) \text{ para todo } x \in [0, L] \\ u(t, 0) = a, \quad u(t, L) = b \text{ para todo } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) ¿Para qué funciones f el problema admite una solución constante en el tiempo? (Es decir, $u(t, x) = f(x)$ para todo $t \geq 0$.)

b) ¿Cómo se resuelve el problema en general?

12. Consideramos la ecuación del calor $u_t = ku_{xx}$ en una barra de largo uno. Hallar las soluciones a dicha ecuación con los siguientes valores iniciales y de frontera,

a) $u(x, 0) = (\sin n\pi x/2)(\cos n\pi x/2)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$,

b) $u(x, 0) = a + (b-a)x + \sin 3\pi x$, $u(0, t) = a$, $u(1, t) = b$.

¹Es decir, sumandos de la serie de Fourier.

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xh}{p} & 0 \leq x \leq p \\ \frac{h(\pi-x)}{\pi-p} & p \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Consideremos la ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ en el intervalo $[0, \pi]$. Hallar solución de la ecuación de onda con $u(x, 0) = f(x)$, y $u_t(x, 0) = 0$.

14. El Laplaciano de una función dos veces diferenciable $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y).$$

a) Resolver utilizando separación de variables el siguiente problema, donde u es una función continua definida en $[0, \pi] \times [0, \pi]$ y de clase C^2 en $(0, \pi) \times (0, \pi)$:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(0, y) = 0 \text{ y } u(\pi, y) \text{ para todo } y \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = x(\pi - x) \text{ para todo } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

b) Ahora queremos encontrar una función continua u definida en la bola cerrada de radio 1, $\bar{B} = \bar{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y de clase C^2 en el interior de su dominio que cumpla

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } B(0, 1) \\ u = f \text{ en } S^1 = \partial B(0, 1), \end{cases} \quad (1)$$

donde f es una función continua definida en el círculo S^1 .

1) Mostrar que si u es solución del problema, entonces $\tilde{u} = u \circ \varphi$, donde $\varphi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow B(0, 1)$ es el cambio de coordenadas polares, cumple

$$\begin{cases} \tilde{u}rr + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \text{ en el interior del dominio de } \tilde{u}. \\ \tilde{u}(0, \theta) \text{ es constante en } \theta \\ \tilde{u}(r, 0) = \tilde{u}(r, 2\pi) \text{ para todo } r \\ \tilde{u}(1, \theta) = f(\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ para todo } \theta. \end{cases} \quad (2)$$

2) Usar el método de separación de variables para encontrar soluciones de (2) para algunas funciones f y usar esto para obtener un método para resolver (1).

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

15. a) CIRCUITO RLC Calcule la series de Fourier de la function “pulso” $I(t)$ de período T , definida en $[-T/2, T/2]$ como,

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-T/2, 0), \\ 1 & \text{si } x \in [0, T/2) \end{cases}$$

y extendida de manera periódica.

b) Considere un circuito RLC estándar alimentado con un potencial $V(t) = V_0 I(t)$ donde V_0 es constante. Si $Q(t)$ es la carga, sabemos que $Q(t)$ obedece la ecuación

$$LQ'' + RQ' + Q/C = V(t)$$

1) Encuentre una solución particular $Q_p(t)$ usando series de Fourier.

2) Demuestre que dicha solución es la que sobrevivirá en tiempos largos (solución estacionaria).

16. UN PROBLEMA DEL TIPO STURM-LIOUVILLE

La temperatura $T(x)$ de una barra de longitud $2L$ obedece la ecuación diferencial

$$T'' - T = F \quad (3)$$

y es mantenida a temperatura constante $T = 1$ en los extremos $x = -L$ y $x = L$. La “fuente” $F(x)$ es la función $x^2 - 1$.

- a) Encuentre una representación de la temperatura $T(x)$ en series de Fourier.
- b) Usando el criterio de la mayorante Weirstrass demuestre que dicha serie converge uniformemente a una función C^2 (es decir que dicha representación en series es de hecho la solución a (3)).