Notas 20/8

Física II - Grupo 2
Enzo

La matemática que necesitamos para este curso es sencilla, vamos a repasar algunos conceptos.

Vectores:

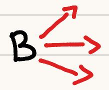
¿Que es un vector?

Hay distintas maneras de pensar un vector, la mas intuiva es pensarlo como una cantidad que no solo tiene módulo, sino que tiene dirección y sentido.

Pensemos en un ejemplo, la temperatura queda completamente definida por un número en cada región del espacio.

En el punto $x=5m$, la temperatura es $T=300K$.

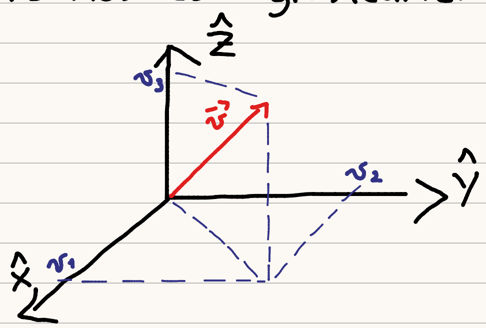
Sin embargo, si se nos dice "una bajista se mueve con una velocidad $v=5m/s$", no se nos determina completamente el movimiento de la bajista. ¿Hacia dónde se mueve?



Esta es la idea intuitiva de porque la física precisa de las cantidades vectoriales.

Ahora, vamos con la matemática...

En principio, pensemos un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ como una colección de 3 números $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$. Estos números indican "cuanto vale $\vec{v}$ en las direcciones x, y y z", veamos esto graficamente y con un ejemplo.



Consideremos como ejemplo numérico $\vec{v}=(1,2,1)$.

Sigamos construyendo nuestra teoría de vectores...

Nos gustaria tener una base en la que escribir mis vectores.

¿Les suena esta palabra? Piensenlo como un conjunto de vectores a partir de los cuales puedo escribir cualquier vector.

Introduzcamos nuestra base,

$$\begin{cases} \hat{x} = (1,0,0) \\ \hat{y} = (0,1,0) \\ \hat{z} = (0,0,1) \end{cases}$$

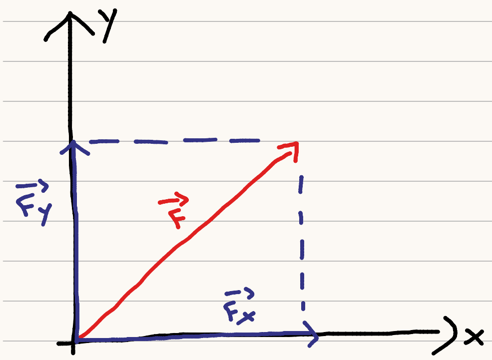
Otra notación muy usada es $\hat{x} = \hat{\imath}$, $\hat{y} = \hat{\jmath}$, $\hat{z} = \hat{k}$.

¿Como escribo el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en la base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$? ¿Esta notación?

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3)$$
$$= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)$$
$$= v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$$

Acá use como sumar vectores!!

Ustedes esto lo hacían siempre en Física I.
Piensen en una fuerza:



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$
$$= |\vec{F}_x|\hat{x} + |\vec{F}_y|\hat{y}$$

¿Lo ven?

Aporte de Sofía en el practico del 22/8.

¿Como opero con vectores?

Antes, introduzcamos la noción de norma. Dado $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, su norma es,

$$||\vec{v}|| = |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

2 notaciones comunes

La norma de un vector es "que tan largo es".

Hay 3 operaciones definidas entre vectores: suma $+$, producto interno o escalar $\cdot$ y producto exterior o vectorial $\times$ o $\wedge$.

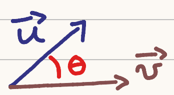
Trabajemos con $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) = (u_1 + v_1)\hat{x} + (v_2 + u_2)\hat{y} + (v_3 + u_3)\hat{z}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$|\underbrace{\vec{v} \times \vec{u}}_{\text{Complicado}}| = |\vec{v}||\vec{u}|\sin\theta$$

¿Quien es θ? El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



También puedo multiplicar un vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ por un escalar a,

$a\vec{v}=a(v_1,v_2,v_3)=(av_1,av_2,av_3)$

Distancia entre vectores:

Si tengo dos vectores $\vec{v}=v_1\hat{x}+v_2\hat{y}+v_3\hat{z}$ y $\vec{u}=u_1\hat{x}+u_2\hat{y}+u_3\hat{z}$, su distancia vendrá dada por $|\vec{v}-\vec{u}|$.

1) $\vec{v}-\vec{u}=(v_1-u_1)\hat{x}+(v_2-u_2)\hat{y}+(v_3-u_3)\hat{z}$

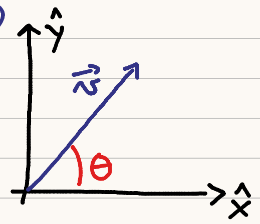
2) $|\vec{v}-\vec{u}|=\sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2}$

Muy importante para el practico.

Vectores en 2D:

Trabajemos un poco con vectores $\vec{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ que son los que aparecen en el práctico 1.

1



Dado $|\vec{v}|$ y θ, ¿como hallo v_1 y v_2?

$$\begin{cases} v_1=|\vec{v}|\cos\theta \\ v_2=|\vec{v}|\sin\theta \end{cases}$$

2 El vector radial.

En electromagnetismo, generalmente, no es cómodo trabajar en las coordenadas x, y, por lo que buscamos un sistema de coordenadas mas natural. Estas son r, θ.

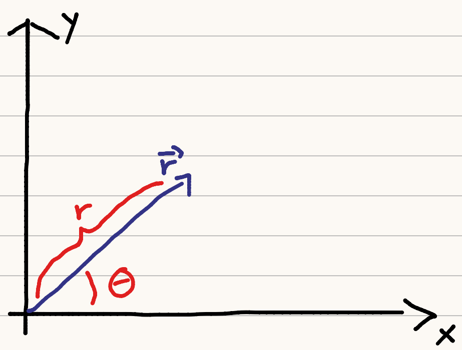
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

A un vector de norma 1, se le llama versor y se le suele notar "con un techito" $\hat{v}$. Para construir el versor $\hat{v}$ a partir del vector $\vec{v}$, basta con dividir por la norma.

$$\hat{v}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Por lo que el versor $\hat{r}$ es,

$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

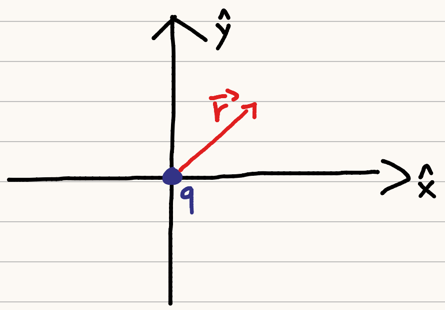


x, y ⟶ r, θ

Ver que:

$$\hat{r}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta\,\hat{x}+\sin\theta\,\hat{y}$$

Veamos la utilidad de esto en física...



Supongamos que tenemos una carga q en el origen y queremos calcular el campo eléctrico que produce en $\vec{r}$, la ley de Coulomb nos dice que,

Ya lo van a ver en el teórico.

$$\vec{E}(|\vec{r}|) = \frac{q}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0}_{1/K_E}|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

Bien, ahora, estamos listos para hablar de física!!!

Comentario: En el foro preguntaron,

¿Si $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}$, entonces $|\vec{v}| = |\vec{v_1}| + |\vec{v_2}| + |\vec{v_3}|$?

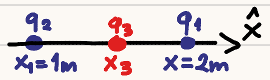
NO!!!

En general: $|\vec{v}| \leq |\vec{v_1}| + |\vec{v_2}| + |\vec{v_3}|$.

La igualdad solo se cumple si $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son colineales.

Práctico 1:

1.1:



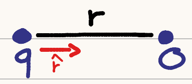
$q_1 = -2\mu C$

$q_2 = -3\mu C$

$q_3 > 0$

La ley de Coulomb nos dice que provoca una carga q sobre una carga Q a una distancia r es,

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$



Sobre q_3 actúan las fuerzas que actúan sobre q_3 son las que generan q_1 y q_2. La fuerza total que actúa sobre q_3 es,

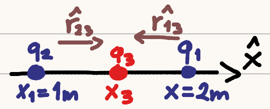
$$\vec{F}_{/3} = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$$

Acá, $\vec{F}_{i/j}$ se lee "la fuerza que ejerce la carga i sobre la carga j" y $\vec{F}_{/j}$ se lee "la fuerza que se ejerce sobre la carga j".

Usando la ley de Coulomb,

$$\vec{F}_{/3} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}^2}\hat{r}_{23}$$ ¿Quienes son?

Veamos el dibujito:



Entonces $\begin{cases} \hat{r}_{23} = \hat{x} \\ \hat{r}_{13} = -\hat{x} \end{cases}$ ¿Lo ven?

$$\Rightarrow \vec{F}_{/3} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{r_{23}^2} - \frac{q_1}{r_{13}^2}\right)\hat{x}$$

Los vectores posición de las cargas son,

- $\vec{r}_1 = 2\hat{x}$
- $\vec{r}_2 = \hat{x}$
- $\vec{r}_3 = x_3\hat{x}$

Entonces, las distancias son,

$r_{23} = |1 - x_3| = x_3 - 1$

$r_{13} = |2 - x_3| = 2 - x_3$

$$\Rightarrow \vec{F}_{/3} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{(x_3-1)^2} - \frac{q_1}{(2-x_3)^2}\right)\hat{x}$$

Ahora, queremos hallar x_3 tal que $\vec{F}_{/3} = 0$,

$$\Rightarrow \vec{F}_{/3} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{(x_3-1)^2} - \frac{q_1}{(2-x_3)^2}\right)\hat{x} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}}_{\neq 0}\left(\frac{q_2}{(x_3-1)^2} - \frac{q_1}{(2-x_3)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_2}{(x_3-1)^2} - \frac{q_1}{(2-x_3)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_2}{(x_3-1)^2} = \frac{q_1}{(2-x_3)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{q_2}{q_1}}_{>0} = \frac{(\overbrace{x_3-1}^{>0})^2}{(\underbrace{2-x_3}_{>0})^2}$$ Complica el despeje... ¿Puedo tomar raíz cuadrada?

Si, porque me asegure que todas las cantidades sean positivas.

$$\Rightarrow \sqrt{\underbrace{\frac{q_2}{q_1}}_{=\frac{3}{2}}} = \frac{x_3 - 1}{2 - x_3}$$

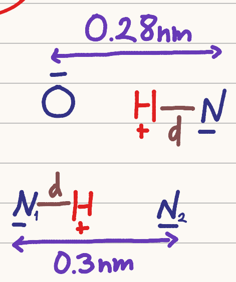
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}(2 - x_3) = x_3 - 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)x$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1+2\sqrt{3/2}}{1+\sqrt{3/2}} \simeq 1.55\,\text{m}$$

$2\sqrt{3/2} = \sqrt{6}$

1.3:



$d = 0.11\,\text{nm}$

ⓐ Solo consideramos solo las fuerzas que el O le hace al H y N y las fuerzas que el N_1 y el H le ejerce al N_2. También se nos dice que las fuerzas son colineales para que sólo pensemos en módulo y sentido $\pm$ y no en dirección.

$$F_{O/N} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d_{ON}^2} \qquad d_{ON} = 0.28\,\text{nm}$$

$$F_{O/H} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d_{OH}^2} \qquad d_{OH} = 0.28\,\text{nm} - 0.11\,\text{nm} = 0.17\,\text{nm}$$

$$F_{N/N} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d_{NN}^2} \qquad d_{NN} = 0.3\,\text{nm}$$

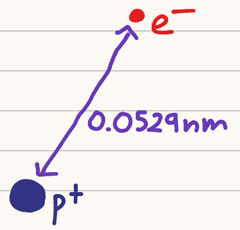
$$F_{N/H} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d_{NH}^2} \qquad d_{NH} = 0.3\,\text{nm} - 0.11\,\text{nm} = 0.19\,\text{nm}$$

Juntando todo y calculando,

$$F_{ta} = -8.85\times10^{-9}\,N$$

timina-adenina

ⓑ



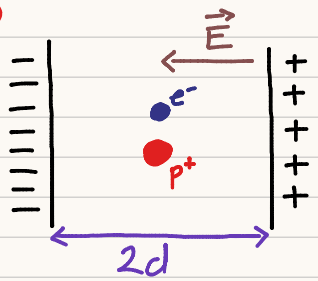
La fuerza que le ejerce el protón al electrón es,

$$F_{pe} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d_{pe}^2} \simeq -8.23\times10^{-8}\,N$$

$$\Rightarrow \frac{F_{pe}}{F_{ta}} \simeq 9.3$$

La fuerza que el protón le ejerce al electrón es 9.3 veces mayor que la que la timina le ejerce a la adenina !!!

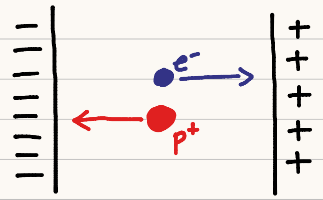
1.4:



ⓐ El campo eléctrico entre las placas es cte y apunta desde la placa + a la −. Una carga q en presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ sufre una fuerza $\vec{F}$ dada por,

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

El protón y el electrón tienen la misma carga, pero con distinto signo, por lo que las fuerzas tendrán distinto signo e igual módulo.



Por lo tanto, el electrón se acelera hacia la placa + y el protón hacia la placa −.

(b)

La segunda ley de Newton nos dice que,

$$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Como $|q\vec{E}|$ es igual para el protón y el electrón, el electrón se acelerará mas por tener menor masa.

(c)

¿Se acuerdan del teorema del trabajo-energía?

El teorema trabajo-energía nos dice que la energía cinética adquirida (o perdida) por un sistema es igual a el trabajo que se realiza sobre el,

$$\Delta E_c = W$$

A su vez, el trabajo de una fuerza constante es el producto escalar de la fuerza por el vector desplazamiento,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\Rightarrow \Delta E_c = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| d$$

Por lo tanto, el protón y el electrón adquieren la misma energía cinética.