Une breve introducción a la teoría de los Grandes Desvíos

Seminario de Grandes Desvíos y sus Aplicaciones

Valeria Goicoechea

Universidad de la República, Montevideo-Uruguay

21 de Agosto de 2025

¿Qué es un Principio de Grandes Desvíos?

Lluvia de ideas

Un grupo de matemáticos:

- "Es un refinamiento de la LGN y el TCL"

Lluvia de ideas

Un grupo de matemáticos:

- "Es un refinamiento de la LGN y el TCL"
- "Es una extensión del teorema de Cramér relacionado al promedio de v.a."

Lluvia de ideas

Un grupo de matemáticos:

- "Es un refinamiento de la LGN y el TCL"
- "Es una extensión del teorema de Cramér relacionado al promedio de v.a."
- "Está relacionado con el *método de Laplace* o *Principio de Laplace*"

Lluvia de ideas

Un grupo de matemáticos:

- "Es un refinamiento de la LGN y el TCL"
- "Es una extensión del teorema de Cramér relacionado al promedio de v.a."
- "Está relacionado con el *método de Laplace* o *Principio de Laplace*"
- "Tiene que ver con cambios de medida de orden exponencial"

Lluvia de ideas

Un grupo de matemáticos:

- "Es un refinamiento de la LGN y el TCL"
- "Es una extensión del teorema de Cramér relacionado al promedio de v.a."
- "Está relacionado con el *método de Laplace* o *Principio de Laplace*"
- "Tiene que ver con cambios de medida de orden exponencial"
- "Tiene que ver con el decaimiento exponencial de las probabilidades de eventos raros"

Lluvia de ideas

Un grupo de físicos:

- “Es una generalización de la teoría de fluctuaciones de Einstein”

Lluvia de ideas

Un grupo de físicos:

- "Es una generalización de la teoría de fluctuaciones de Einstein"
- "Es un conjunto de técnicas para calcular **entropías** y funciones de **energía libres**"

Lluvia de ideas

Un grupo de físicos:

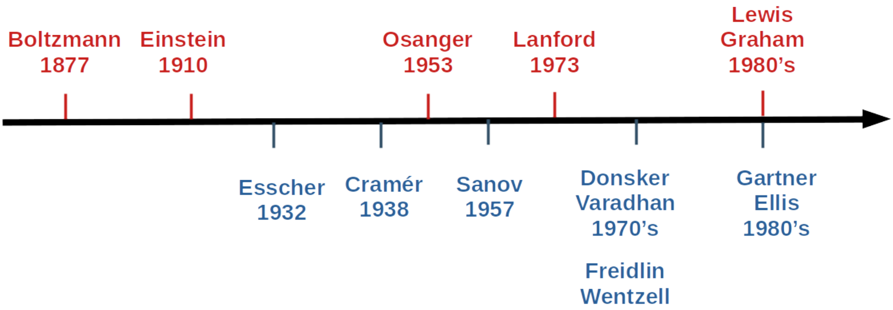
- "Es una generalización de la teoría de fluctuaciones de Einstein"
- "Es un conjunto de técnicas para calcular **entropías** y funciones de **energía libres**"
- "Es una expresión rigurosa de las aproximaciones a estados de equilibrio, que se usan bastante en mecánica estadística"

Lluvia de ideas

Un grupo de físicos:

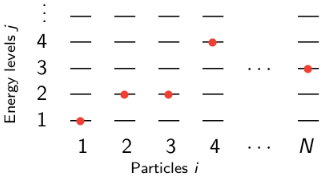
- "Es una generalización de la teoría de fluctuaciones de Einstein"
- "Es un conjunto de técnicas para calcular **entropías** y funciones de **energía libres**"
- "Es una expresión rigurosa de las aproximaciones a estados de equilibrio, que se usan bastante en mecánica estadística"
- "Es una formulación rigurosa de la mecánica estadística"

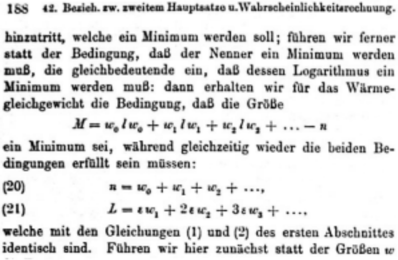
Teoría de los Grandes Desvíos



BOLTZMANN (1877) Gas ideal

(microscópico)





188 42. Bezieh. zw. zweitem Hauptsatze u. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

hinzutritt, welche ein Minimum werden soll; führen wir ferner statt der Bedingung, daß der Nenner ein Minimum werden muß, die gleichbedeutende ein, daß dessen Logarithmus ein Minimum werden muß: dann erhalten wir für das Wärmegleichgewicht die Bedingung, daß die Größe

$$M = w_0 l w_0 + w_1 l w_1 + w_2 l w_2 + \dots - n$$

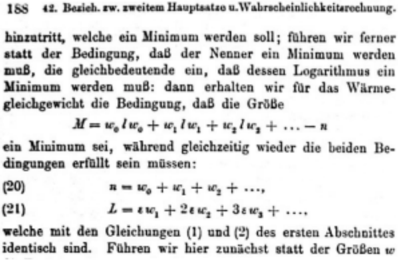
ein Minimum sei, während gleichzeitig wieder die beiden Bedingungen erfüllt sein müssen:

(20) $$n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

(21) $$L = \varepsilon w_1 + 2\varepsilon w_2 + 3\varepsilon w_3 + \dots.$$

welche mit den Gleichungen (1) und (2) des ersten Abschnittes identisch sind. Führen wir hier zunächst statt der Größen w

BOLTZMANN (1877) Gas ideal



188 42. Bezieh. zw. zweitem Hauptsatze u. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

hinzutritt, welche ein Minimum werden soll; führen wir ferner statt der Bedingung, daß der Nenner ein Minimum werden muß, die gleichbedeutende ein, daß dessen Logarithmus ein Minimum werden muß: dann erhalten wir für das Wärmegleichgewicht die Bedingung, daß die Größe

$$M = w_0 \, l \, w_0 + w_1 \, l \, w_1 + w_2 \, l \, w_2 + \dots - n$$

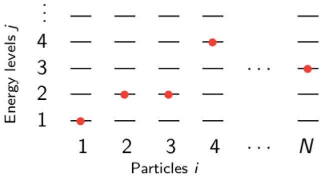
ein Minimum sei, während gleichzeitig wieder die beiden Bedingungen erfüllt sein müssen:

(20) $$n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

(21) $$L = \varepsilon w_1 + 2 \varepsilon w_2 + 3 \varepsilon w_3 + \dots.$$

welche mit den Gleichungen (1) und (2) des ersten Abschnittes identisch sind. Führen wir hier zunächst statt der Größen w

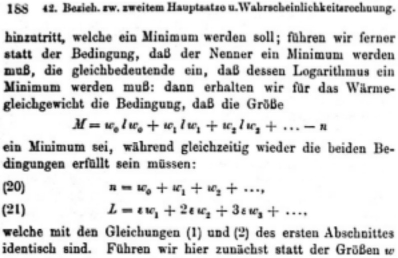
(microscópico)



Distribución de energía (macroscópico):

$\omega_j = \#$ de part. en el nivel j

BOLTZMANN (1877) Gas ideal



188 42. Bezieh. zw. zweitem Hauptsatze u. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

hinzutritt, welche ein Minimum werden soll; führen wir ferner statt der Bedingung, daß der Nenner ein Minimum werden muß, die gleichbedeutende ein, daß dessen Logarithmus ein Minimum werden muß: dann erhalten wir für das Wärmegleichgewicht die Bedingung, daß die Größe

$$M = w_0 \, l \, w_0 + w_1 \, l \, w_1 + w_2 \, l \, w_2 + \dots - n$$

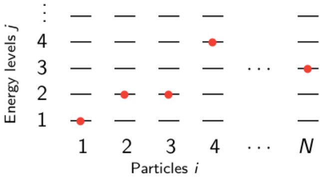
ein Minimum sei, während gleichzeitig wieder die beiden Bedingungen erfüllt sein müssen:

(20) $$n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

(21) $$L = \varepsilon w_1 + 2 \varepsilon w_2 + 3 \varepsilon w_3 + \dots.$$

welche mit den Gleichungen (1) und (2) des ersten Abschnittes identisch sind. Führen wir hier zunächst statt der Größen w

(microscópico)



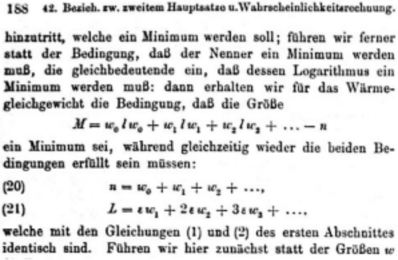
Distribución de energía (macroscópico):

$\omega_j = \#$ de part. en el nivel j

$$\log\left(\frac{N!}{\prod_j \omega_j}\right) \approx -N \sum_j \omega_j \log(\omega_j)$$

$$= N S(\omega)$$

BOLTZMANN (1877) Gas ideal



188 42. Bezieh. zw. zweitem Hauptsatze u. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

hinzutritt, welche ein Minimum werden soll; führen wir ferner statt der Bedingung, daß der Nenner ein Minimum werden muß, die gleichbedeutende ein, daß dessen Logarithmus ein Minimum werden muß: dann erhalten wir für das Wärmegleichgewicht die Bedingung, daß die Größe

$$M = w_0 \, l w_0 + w_1 \, l w_1 + w_2 \, l w_2 + \dots - n$$

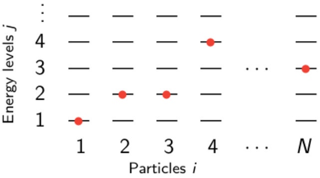
ein Minimum sei, während gleichzeitig wieder die beiden Bedingungen erfüllt sein müssen:

(20) $n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$

(21) $L = \varepsilon w_1 + 2\varepsilon w_2 + 3\varepsilon w_3 + \dots.$

welche mit den Gleichungen (1) und (2) des ersten Abschnittes identisch sind. Führen wir hier zunächst statt der Größen w

(microscópico)



Distribución de energía (macroscópico):

$\omega_j = \#$ de part. en el nivel j

$$\log\left(\frac{N!}{\prod_j \omega_j}\right) \approx -N \sum_j \omega_j \log(\omega_j)$$

$$= N S(\omega)$$

$\mathbb{P}(\omega) \approx e^{N S(\omega)}$ Entropía

EINSTEIN (1910) Gas no ideal

Aus Gleichung (1) folgt

$$W = \text{konst.}\, e^{\frac{N}{R} S}.$$

Diese Gleichung gilt der Größenordnung nach, wenn man jedem Zustand Z ein kleines Gebiet, von der Größenordnung wahrnehmbarer Gebiete, zuordnet. Die Konstante bestimmt sich der Größenordnung nach durch die Erwägung, daß W für den Zustand des Entropiemaximums (Entropie S_0) von der Größenordnung Eins ist, so daß man der Größenordnung nach hat

$$W = e^{\frac{N}{R}(S - S_0)}.$$

- Generalización de Boltzmann

EINSTEIN (1910) Gas no ideal

Aus Gleichung (1) folgt

$$W = \text{konst.}\, e^{\frac{N}{R}S}.$$

Diese Gleichung gilt der Größenordnung nach, wenn man jedem Zustand Z ein kleines Gebiet, von der Größenordnung wahrnehmbarer Gebiete, zuordnet. Die Konstante bestimmt sich der Größenordnung nach durch die Erwägung, daß W für den Zustand des Entropiemaximums (Entropie S_0) von der Größenordnung Eins ist, so daß man der Größenordnung nach hat

$$W = e^{\frac{N}{R}(S - S_0)}.$$

- Generalización de Boltzmann
- Macroestados: M_N

EINSTEIN (1910) Gas no ideal

Aus Gleichung (1) folgt

$$W = \text{konst.}\, e^{\frac{N}{R} S}.$$

Diese Gleichung gilt der Größenordnung nach, wenn man jedem Zustand Z ein kleines Gebiet, von der Größenordnung wahrnehmbarer Gebiete, zuordnet. Die Konstante bestimmt sich der Größenordnung nach durch die Erwägung, daß W für den Zustand des Entropiemaximums (Entropie S_0) von der Größenordnung Eins ist, so daß man der Größenordnung nach hat

$$W = e^{\frac{N}{R}(S - S_0)}.$$

- Generalización de Boltzmann
- Macroestados: M_N
- Densidad:

$$W(m) = \#\{\omega : \; M_N(\omega) = m\}$$

Postulado de Einstein:

- Existe una entropía S tal que $W(m) = e^{NS(m)}$

Postulado de Einstein:

- Existe una entropía S tal que $W(m) = e^{NS(m)}$
- Probabilidad: $\mathbb{P}(m) = e^{N(S(m)-S(m^*))}$, siendo m^* (equilibrio) tal que

$$S(m^*) = \sup_m S(m)$$

- Existe una entropía S tal que $W(m) = e^{NS(m)}$
- Probabilidad: $\mathbb{P}(m) = e^{N(S(m)-S(m^*))}$, siendo m^* (equilibrio) tal que

$$S(m^*) = \sup_m S(m)$$

- S debe estar relacionada a las funciones de energía libre.

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

- $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

- $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- **LGN**: $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to \lambda$, luego $S_n = X_1 + \cdots + X_n \approx n\lambda$

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

- $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- **LGN**: $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to \lambda$, luego $S_n = X_1 + \cdots + X_n \approx n\lambda$
- Si $a > \lambda$, ¿cómo es $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right)$?

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

- $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- **LGN**: $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \lambda$, luego $S_n = X_1 + \cdots + X_n \approx n\lambda$
- Si $a > \lambda$, ¿cómo es $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right)$?
- Por la LGN, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) \to 0$

F. ESSCHER (1932)

On the probability function in the collective theory of risk

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. tales que $X_i =$ monto reclamado por el cliente i a una aseguradora.

- $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$
- **LGN**: $\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \lambda$, luego $S_n = X_1 + \cdots + X_n \approx n\lambda$
- Si $a > \lambda$, ¿cómo es $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right)$?
- Por la LGN, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) \to 0$
- Por el TCL,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right) > \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}(a - \lambda)\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}(a - \lambda)\right) \to 0 \text{ si } a \gg \lambda.\end{aligned}$$

- Luego, el evento $\{S_n > na\}$ es un **evento raro**, pero que puede tener un gran impacto para la aseguradora

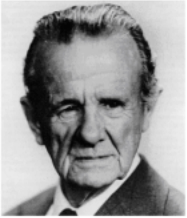
- Luego, el evento $\{S_n > na\}$ es un **evento raro**, pero que puede tener un gran impacto para la aseguradora

- Esscher probó que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) \approx e^{-nI(a)},$$

siendo $I(a)$ una constante que solo depende de a y λ.

CRAMÉR (1938)



Harald Cramér (1893-1985)

On a d'ailleurs $b_0 = \frac{1}{h\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}$. En introduisant dans (21), on obtient donc

$$1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-(h\bar{m} - \log R)n} \left[b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \right]. \tag{28}$$

Soit maintenant c un nombre donné tel que $0 < c < C_1$, et prenons h égal à la racine (unique) positive de l'équation (27). En introduisant cette valeur dans (28) et en posant

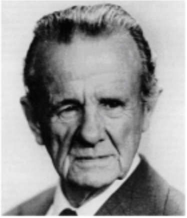
$$\alpha = h\bar{m} - \log R \tag{29}$$

(où l'on voit facilement que α est toujours positif), on a le théorème suivant.

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. ($X_i \in \mathbb{R}$) tales que existe su **función generatriz de momentos**:

$$M(\alpha) := \mathbb{E}\left(e^{\alpha X_1}\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

CRAMÉR (1938)



Harald Cramér (1893-1985)

On a d'ailleurs $b_0 = \frac{1}{h\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}$. En introduisant dans (21), on obtient donc

$$1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-(h\bar{m} - \log R)n}\left[b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right]. \tag{28}$$

Soit maintenant c un nombre donné tel que $0 < c < C_1$, et prenons h égal à la racine (unique) positive de l'équation (27). En introduisant cette valeur dans (28) et en posant

$$\alpha = h\bar{m} - \log R \tag{29}$$

(où l'on voit facilement que α est toujours positif), on a le théorème suivant.

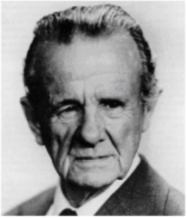
- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. ($X_i \in \mathbb{R}$) tales que existe su **función generatriz de momentos**:

$$M(\alpha) := \mathbb{E}\left(e^{\alpha X_1}\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Si $a > \mathbb{E}(X_1)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) = -I(a)$$

CRAMÉR (1938)



Harald Cramér (1893-1985)

On a d'ailleurs $b_0 = \frac{1}{h\bar{\sigma}\sqrt{2\pi}}$. En introduisant dans (21), on obtient donc

$$(28) \quad 1 - F_n\left(\frac{\bar{m}\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-(h\bar{m} - \log R)n}\left[b_0 + \frac{b_1}{n} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right].$$

Soit maintenant c un nombre donné tel que $0 < c < C_1$, et prenons h égal à la racine (unique) positive de l'équation (27). En introduisant cette valeur dans (28) et en posant

$$(29) \quad \alpha = h\bar{m} - \log R$$

(où l'on voit facilement que α est toujours positif), on a le théorème suivant.

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. ($X_i \in \mathbb{R}$) tales que existe su **función generatriz de momentos**:

$$M(\alpha) := \mathbb{E}\left(e^{\alpha X_1}\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Si $a > \mathbb{E}(X_1)$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > a\right) = -I(a)$$

- Si $a < \mathbb{E}(X_1)$, entonces
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < a\right) = -I(a)$$

CRAMÉR (1938)

- $I(a) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha a - \log M(\alpha)\}$

- $I(a) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha a - \log M(\alpha)\}$
- Es la transformada de *Legendre-Fenchel* de $\Lambda(\alpha) = \log M(\alpha)$

CRAMÉR (1938)

- $I(a) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha a - \log M(\alpha)\}$
- Es la transformada de *Legendre-Fenchel* de $\Lambda(\alpha) = \log M(\alpha)$
- ¿Qué ocurre si $X_i \in \mathbb{R}^d$?

SANOV (1957)

Ivan Nikolaevich Sanov (1919-1968)

Теорема 10. *Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, $F_N(x)$ — эмпирическая функция распределения после N независимых наблюдений случайной величины ξ. Пусть $\Phi(x)$ — другая функция распределения, такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi}\, d\Phi$ существует. Пусть V_n — последовательность ε-окрестностей, содержащих $\Phi(x)$ и F-сходящихся к ней.*

Тогда

$$P(F_N \in V_n) = e^{N\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi + \delta_n + O\left(\frac{n \ln N}{N}\right)\right]}, \tag{45}$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i \in \mathbb{R}$) i.i.d. con distribución μ y

$$L_n(C) := \frac{1}{n} \#\{i : X_i \in C\}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(C)$$

SANOV (1957)

Ivan Nikolaevich Sanov (1919-1968)

Теорема 10. *Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, $F_N(x)$ — эмпирическая функция распределения после N независимых наблюдений случайной величины ξ. Пусть $\Phi(x)$ — другая функция распределения, такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi$ существует. Пусть V_n — последовательность ε-окрестностей, содержащих $\Phi(x)$ и F-сходящихся к ней.*

Тогда

$$P(F_N \in V_n) = e^{N\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi + \delta_N + O\left(\frac{n \ln N}{N}\right)\right]}, \qquad (45)$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i \in \mathbb{R}$) i.i.d. con distribución μ y

$$L_n(C) := \frac{1}{n}\#\{i : X_i \in C\}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(C)$$

- $L_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

Ivan Nikolaevich Sanov (1919-1968)

Теорема 10. *Пусть* $F(x)$ — *функция распределения случайной величины* ξ, $F_N(x)$ — *эмпирическая функция распределения после* N *независимых наблюдений случайной величины* ξ. *Пусть* $\Phi(x)$ — *другая функция распределения, такая, что* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi}\, d\Phi$ *существует. Пусть* V_n — *последовательность* ε-*окрестностей, содержащих* $\Phi(x)$ *и* F-*сходящихся к ней.*

Тогда

$$P(F_N \in V_n) = e^{N\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi}\, d\Phi + \delta_N + O\left(\frac{n \ln N}{N}\right)\right]}, \tag{45}$$

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ ($X_i \in \mathbb{R}$) i.i.d. con distribución μ y

$$L_n(C) := \frac{1}{n}\#\{i : X_i \in C\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(C)$$

- $L_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$
- Si $A \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(L_n \in A) = -\inf_{\nu \in A} I(\nu)$$

- La función I puede escribirse como:

$$I(\nu) = \begin{cases} \int \frac{d\nu}{d\mu} \log\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu(s), & \text{si existe } \frac{d\nu}{d\mu}, \\ +\infty, & \text{si no} \end{cases}$$

SANOV (1957)

- La función I puede escribirse como:

$$I(\nu) = \begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \log\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu(s), & \text{si existe } \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}, \\ +\infty, & \text{si no} \end{cases}$$

- "**Entropía** relativa" de ν con respecto a μ

SANOV (1957)

- La función I puede escribirse como:

$$I(\nu) = \begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \log\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu(s), & \text{si existe } \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}, \\ +\infty, & \text{si no} \end{cases}$$

- "**Entropía** relativa" de ν con respecto a μ
- "Distancia de Kullback-Leibler"

SANOV (1957)

- La función I puede escribirse como:

$$I(\nu) = \begin{cases} \int \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \log\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu(s), & \text{si existe } \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}, \\ +\infty, & \text{si no} \end{cases}$$

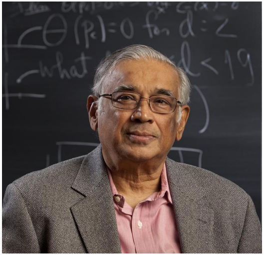
- "**Entropía** relativa" de ν con respecto a μ
- "Distancia de Kullback-Leibler"

- Resultado anticipado por Boltzmann casi 100 años antes

VARADHAN (1966)

Formulación teórica de los Grandes Desvíos

- Presenta una formulación teórica del **Principio de Grandes Desvíos** (PGD)

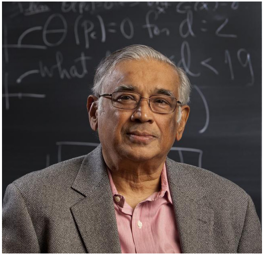


Premio Abel 2007

VARADHAN (1966)

Formulación teórica de los Grandes Desvíos

- Presenta una formulación teórica del **Principio de Grandes Desvíos** (PGD)
- Incluye un conjunto de "trucos" para probar un PGD cuando $\mathbb{P}(X_n \in A) \to 0$ a partir de un cambio de medida que le asigna mucho peso a $\{X_n \in A\}$



Premio Abel 2007

Definición (PGD)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un e.p., $\mathcal{X}$ un espacio métrico ($\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^d$ ó $C\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ ó $D\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ ó ...) y $\{X_n\}_n$ una familia de v.a. $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$.

Definición (PGD)

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un e.p., $\mathcal{X}$ un espacio métrico ($\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^d$ ó $C\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ ó $D\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ ó ...) y $\{X_n\}_n$ una familia de v.a. $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$.

Decimos que $\{X_n\}_n$ verifica un **PGD** si existe una función $I : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ (**tasa** o **entropía**) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(X_n \in A\right) = -\inf_{x\in A} I(x)$$

Problemas de los GD

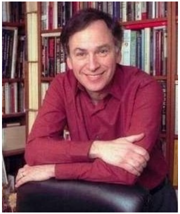
1. **Nivel 1:**
   - Probar que $\{X_n\}_n$ verifica un PGD
   - Hallar I explícitamente

Problemas de los GD

1. **Nivel 1:**
   - Probar que $\{X_n\}_n$ verifica un PGD
   - Hallar I explícitamente
2. **Nivel 2:** Deducir propiedades de $\{X_n\}_n$ a partir de I:
   - **Estados de equilibrio** (LGN): Hallar x_0 tal que $I(x_0) = 0$
   - Determinar el estado más probable una vez que ha ocurrido un gran desvío respecto de x_0:

$$\text{si } x_0 \notin A \text{ y } \inf_{x \in A} I(x) = I(x^*), \text{ entonces } x^* \text{es el estado más probable}$$

GARTNER-ELLIS (1980's)



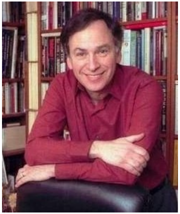
Richard S. Ellis

Jurgen Gartner

- Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. ($X_i \in \mathbb{R}$) tales que existe:

$$\Lambda(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left(e^{n\alpha X_n}\right)$$

GARTNER-ELLIS (1980's)



Richard S. Ellis

Jurgen Gartner

- Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a. ($X_i \in \mathbb{R}$) tales que existe:

$$\Lambda(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{E}\left(e^{n\alpha X_n}\right)$$

- Si $\Lambda(\alpha)$ es diferenciable, entonces $\{X_n\}_n$ verifica un PGD con

$$I(x) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha x - \Lambda(\alpha)\}$$

- Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso de Markov

- Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso de Markov
- $Y_T := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(X_s)\mathrm{ds}$

- Sea $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ un proceso de Markov
- $Y_T := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(X_s)\mathrm{d}s$
- Si $T \to +\infty$: $\mathbb{P}(Y_T = y) \approx e^{-TI(y)}$

Más allá de las v.a.: Perturbaciones de sistemas dinámicos

Freidlin & Wentzell (1970's)

- Sea $\begin{cases} \dot{x} = b(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Más allá de las v.a.: Perturbaciones de sistemas dinámicos

Freidlin & Wentzell (1970's)

- Sea $\begin{cases} \dot{x} = b(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- Sea $\{X_t^n\}_{t\in[0,T]}$ solución de:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^n = b\left(X_t^n\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{1}{n}}\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Más allá de las v.a.: Perturbaciones de sistemas dinámicos

Freidlin & Wentzell (1970's)

- Sea $\begin{cases} \dot{x} = b(x), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- Sea $\{X_t^n\}_{t\in[0,T]}$ solución de:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^n = b\left(X_t^n\right)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{1}{n}}\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(X^n \in A) = -\inf_{x\in A} I(x)$ con

$$I(x) = \int_0^T \left(\dot{x}(t) - b(x(t))\right)^2 \mathrm{d}t$$

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$
- Eventos raros $=$ Fluctuaciones

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$
- Eventos raros = Fluctuaciones
- Estado más probable = Estado de equilibrio o típico

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$
- Eventos raros $=$ Fluctuaciones
- Estado más probable $=$ Estado de equilibrio o típico
- Función de tasa $=$ -Entropía

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$
- Eventos raros $=$ Fluctuaciones
- Estado más probable $=$ Estado de equilibrio o típico
- Función de tasa $=$ -Entropía
- Λ, cumulante $=$ Energías libres

Resumen

- Se viene desarrollando la teoría para poder estudiar los GD para cualquier familia de v.a. $\{X_n\}_n$ con $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$
- Límites escalados en $n \to \infty$, $T \to \infty$, $\varepsilon \to 0$
- Eventos raros $=$ Fluctuaciones
- Estado más probable $=$ Estado de equilibrio o típico
- Función de tasa $=$ -Entropía
- Λ, cumulante $=$ Energías libres
- Los matemáticos y físicos deberíamos conversar más seguido

¡GRACIAS!