ANUNCIOS

Primer evaluación corta habilita hasta la medianoche del sábado 14, temas: Los correspondientes a toda la Unidad 1. Recuerden que sólo se puede hacer en este periodo y el 2do. intento sólo será válido para quienes lo hicieron en este periodo.

MODIFICACIÓN EN EVALUACIONES:

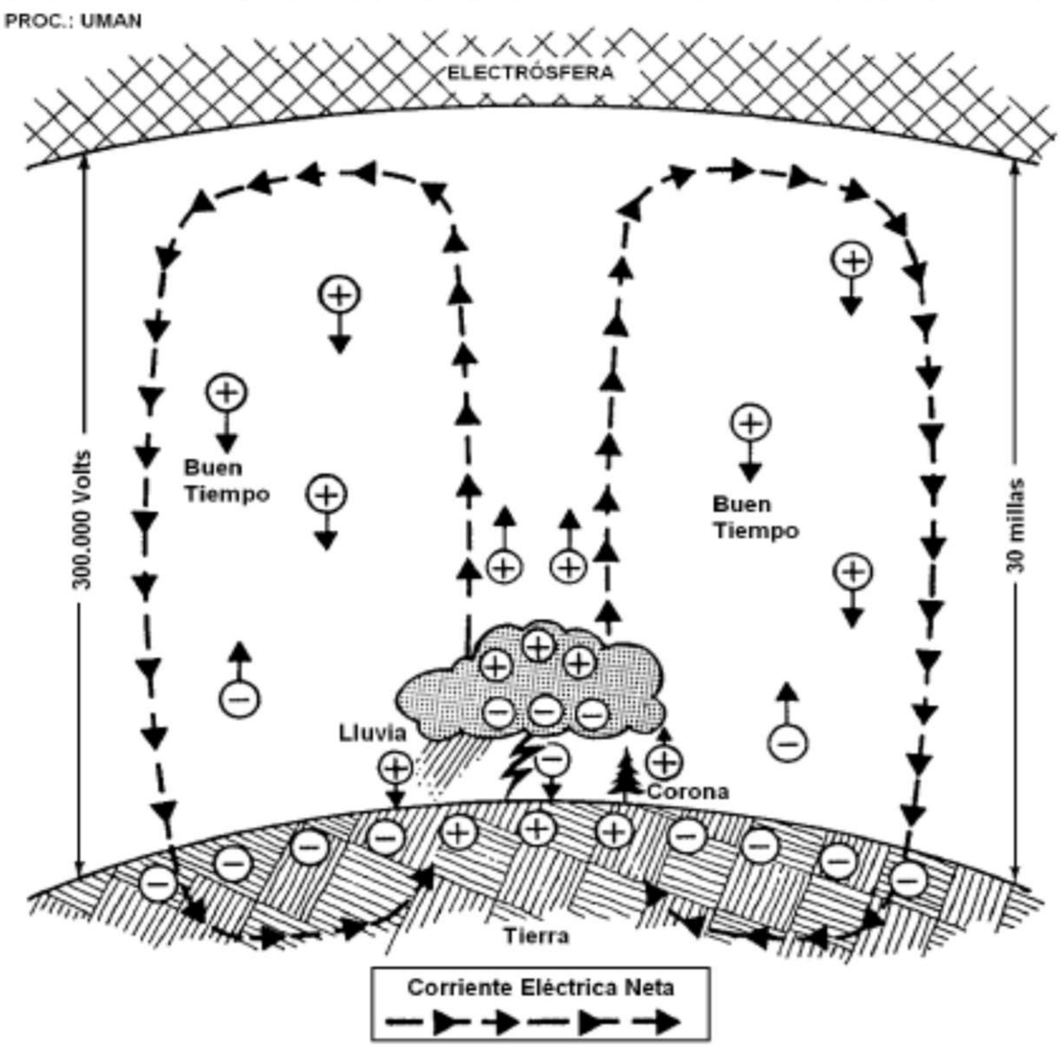
De **carácter optativo** se puede mantener la forma actual de múltiple opción, donde sólo se entrega la hoja de evaluación con las respuestas marcadas.

En **ejercicios parte A** se podrá entregar con la hoja de la evaluación hojas con resolución total o parcial de los ejercicios de modo que se califique lo realizado. Estos desarrollos se corrigen sólo si el estudiante no marcó la respuesta correcta, y se le podrá otorgar entre 0 y el 80% de los puntos. Habrá un **criterio de admisibilidad** del desarrollo entregado que dependerá de una prolijidad e inteligibilidad mínima. Si esto no se cumple, el desarrollo no será corregido.

En la corrección se valorará: la explicitación de las leyes o principios utilizados y de los modelos e hipótesis que simplifican la resolución, del desarrollo de los diferentes pasos en la resolución, del manejo de las unidades y cifras significativas, del manejo algebraico y de la realización de los cálculos.

Las resoluciones de cada uno de los ejercicios deberán realizarse en hojas separadas, no podrá haber en una misma hoja la resolución de ejercicios distintos.

EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15



a) A partir del campo eléctrico sobre la superficie terrestre con buen tiempo, determina la densidad superficial de carga σ, y suponiendo que la misma es uniforme en todo el planeta, estima el valor de la carga sobre la superficie terrestre.
¿Corresponde a un exceso de cargas positivas o negativas?

b) Determina a partir de la densidad media de corriente, la intensidad total que entra sobre la superficie del planeta. A partir del valor hallado estima el tiempo que tardaría la Tierra en descargarse, suponiendo que en todo el planeta hay buen tiempo.

c) Explica por qué efectivamente no se produce dicha descarga, y se sigue manteniendo cargada.

d) Realiza un modelo de capacitor para las condiciones de buen tiempo y determina el valor de su capacitancia. ¿Podrías realizar otro modelo de capacitor para la situación de una nube de tormenta y el suelo?

EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

a) A partir del campo eléctrico sobre la superficie terrestre con buen tiempo, determina la densidad superficial de carga σ, y suponiendo que la misma es uniforme en todo el planeta, estima el valor de la carga sobre la superficie terrestre. ¿Corresponde a un exceso de cargas positivas o negativas?

Zona entre la superficie terrestre y la electrósfera.

A partir del campo eléctrico atmosférico medio E_0, determinaremos la densidad de carga superficial σ.

Considero a la superficie terrestre como un conductor plano infinito, por lo que su campo eléctrico vale:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \sigma = \varepsilon_0 E_0$$

Considerando que la permitividad del aire es aproximadamente igual a la permitividad del vacío: $\varepsilon_0 = 8{,}8542 \times 10^{-12}\ C^2/(N.m^2)$

y tomando un valor de E_0 = 120 V/m

Se obtiene un valor de $\sigma = 1{,}06 \times 10^{-9}\ C/m^2$

Corresponde a una carga negativa ya que el campo es entrante a la superficie terrestre.

Considerando un radio medio de la Tierra igual a R= 6.371 km y suponiendo a la misma como una esfera uniformemente cargada con la densidad de carga σ anteriormente calculada, se tiene que la carga neta de la Tierra vale:

$$Q_T = (4\pi R^2)\sigma = 5{,}42 \times 10^5\ C \quad \text{(carga negativa)}$$

$Q_T = -5{,}4 \times 10^5$ C (540.000 Coulombs de carga negativa)

EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

b) Determina a partir de la densidad media de corriente, la intensidad total que entra sobre la superficie del planeta. A partir del valor hallado estima el tiempo que tardaría la Tierra en descargarse, suponiendo que en todo el planeta hay buen tiempo.

b) Tomo como densidad de corriente el valor medio: $J = 3{,}00\times10^{-12}\ A/m^2$

La corriente total vale:

$$I = J.A = J.4\pi R^2 = (3{,}00 \times 10^{-12})4\pi(6{,}371 \times 10^6)^2 = 1{,}53 \times10^3\ A$$

La carga total Q se descargaría en un tiempo t:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{5{,}42\times10^5}{1{,}53\times10^3} = 354\ s.$$

I= 1.530 A   t = 354 s   La Tierra se descargaría en menos de 6 minutos!

EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

c) Explica por qué efectivamente no se produce dicha descarga, y se sigue manteniendo cargada.

c) Se producen entre 40 y 100 rayos en cada segundo, que transportan una carga de -20 C.

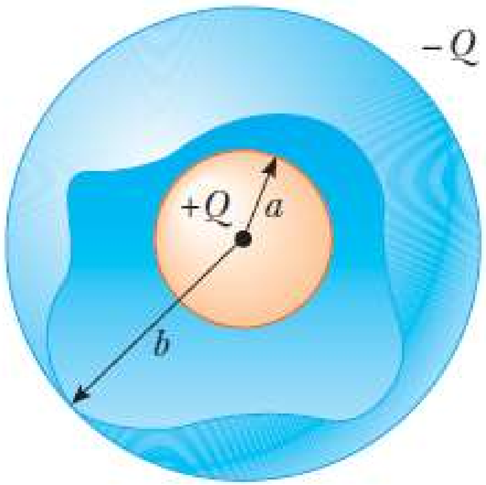
$$I_{rayos\ mínimo} = \dot{n}Q = 40\frac{1}{s}(20\ C) = 800\ A$$

$$I_{rayos\ máxima} = \dot{n}Q = 100\frac{1}{s}(20\ C) = 2000\ A$$

Los rayos están transfiriendo una corriente equivalente de 800 a 2000 A hacia la Tierra que compensa la corriente de buen tiempo que "escapa" de la misma.

EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

d) Para buen tiempo realizo un modelo de capacitor esférico. Habíamos visto que:



$$C = \frac{ab}{k_E\,(b-a)}$$

$$C = \frac{ab}{k_E(b-a)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{(b-a)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R(R+d)}{d}$$

$$\frac{4\pi(8{,}85\times10^{-12})(6371\times10^{3})(6421\times10^{3})}{50\times10^{3}} = 9{,}10\times10^{-2}F$$

Si modelo a la Tierra como un capacitor plano:

$$C_{plano} = \varepsilon\frac{A}{d} = \varepsilon\frac{4\pi R^2}{d} =$$

$$(8{,}85\times10^{-12})\frac{4\pi(6{,}371\times10^{6})^2}{50\times10^{3}} = 90{,}3\times10^{-3}\text{ F}$$

Con ambos modelos obtengo que la capacitancia vale aprox.: **$C = 9{,}0\times10^{-2}$ F**

Sin embargo, esto es una sólo una estimación, considerando que el medio entre las placas es aislante, lo cual sabemos que no lo es, ya que hay una corriente continua entre las placas…

La ventaja del modelo plano, es que me permite usarlo para la situación de mal tiempo, ya que la tormenta es local.
Podemos usar los datos correspondiente a la tormenta: valor del campo eléctrico, distancia de la nube a la superficie, área de la nube…

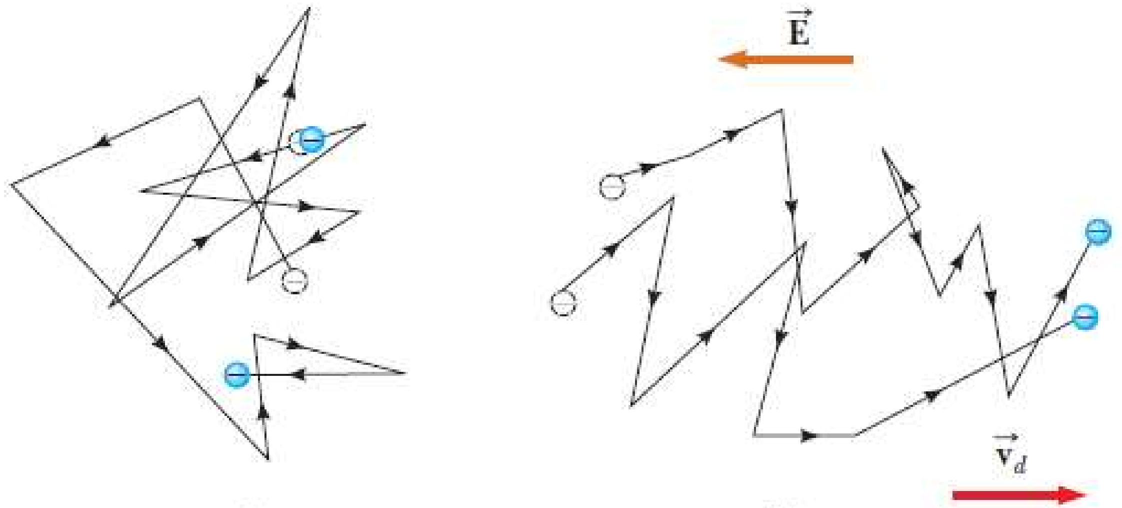
Teoría microscópica de la resistencia

Modelo clásico de conducción eléctrica en metales (1900, Paul Drude) conduce a ley de Ohm y que la resistividad en metales está relacionada con el movimiento de electrones.

Conductor: arreglo de átomos normales más conjunto de electrones libres (**electrones de *conducción*)**.

Sin campo eléctrico externo los electrones de conducción se mueven al azar a través del conductor con una **velocidad térmica media (*u*)** (promedio del orden de 10^6 m/s, similar a un gas de electrones).

La rapidez de arrastre v_d es del orden de 10^{-4} m/s.



a) b)

Recorrido libre medio (λ): distancia media que recorre un electrón entre las colisiones que experimenta con los iones del conductor.

Al aplicarse un E, los electrones libres se desplazan lentamente en sentido opuesto al E, con **rapidez de arrastre v_d** (típicamente 10^{-4} m/s).

Teoría microscópica de la resistencia

Suposiciones:

1) Movimiento del electrón después de una colisión es independiente de su movimiento antes de la colisión.

2) Energía adquirida en exceso por los electrones en el E se pierde en los átomos del conductor cuando chocan. La energía proporcionada a los átomos aumenta su energía vibratoria y la temperatura aumenta.

Electrón libre masa m_e y carga q =(-e) bajo acción de un **E** constante experimenta una fuerza **F** = q**E**. Al aplicar la segunda ley de Newton,

$$\bar{a} = \frac{q\bar{E}}{m_e}$$

$\mathbf{v}_i$ velocidad inicial del electrón en el instante posterior a una colisión

$$\bar{v}_f = \bar{v}_i + \bar{a}t = \bar{v}_i + \frac{q\bar{E}}{m_e}t$$

Valor medio de $\mathbf{v}_i$ (para todos los posibles tiempos entre colisiones t y todos los posibles valores de $\mathbf{v}_i$ de los electrones): es cero (ya que las velocidades iniciales están distribuidas aleatoriamente sobre todos los posibles valores);

Valor medio de 2do. término es (q**E**/m_e)τ, con τ *intervalo de tiempo medio entre colisiones sucesivas*.

Pero el valor promedio de $\mathbf{v}_f$ es igual a la velocidad de arrastre:

$$\bar{v}_{f\,prom} = \bar{v}_d = \frac{q\bar{E}}{m_e}\tau$$

Teoría microscópica de la resistencia

$$\bar{v}_{f\,prom} = \bar{v}_d = \frac{qE}{m_e}\tau$$

$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m_e}\tau$$

Relacionando v_d con la densidad de corriente J

De acuerdo a la ley de Ohm, $J=\sigma E$, se obtienen las siguientes correspondencias para conductividad y resistividad de un conductor:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{nq^2}{m_e}\tau$$

Según este modelo ni conductividad ni resistividad dependen de la intensidad del E.
Característica de un conductor óhmico.

Se pueden obtener expresiones similares usando el **recorrido libre medio λ** y la **velocidad térmica *u*** , en lugar del τ (tiempo medio entre choques).
Cada vez que un electrón choca con un ion, se desvía al azar y pierde la tendencia a moverse según la fuerza eléctrica que experimenta.

Su próximo choque se produce al cabo de un tiempo que satisface: $\tau = \lambda/u$.

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau} = \frac{m_e u}{nq^2\lambda}$$

n y λ dependen del material, la velocidad térmica *u* depende de la temperatura.
λ, es del orden de 100 veces la distancia interatómica

Los electrones viajan a través de la red cristalina del conductor de forma totalmente libre y no chocan hasta que se encuentran con una desviación de la estructura regular de la red: que puede ser una impureza o un ion de la red algo desplazado de su posición de equilibrio debido a su movimiento vibratorio térmico.

Ejemplo

¿Cuál es el tiempo libre medio entre colisiones τ en los electrones de conducción en el cobre y cuál es la trayectoria libre media λ para estas colisiones?
Suponga una rapidez térmica u de $1{,}6\times10^{6}$ m/s, y $n = 1{,}1\times10^{29}$ e/m^3 y la resistividad del cobre $\rho = 1{,}7\times10^{-8}\ \Omega.m$

$$\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau} \qquad \tau = \frac{m_e}{ne^2\rho}$$

$$\tau = \frac{m_e}{ne^2\rho} = \frac{9{,}11\times10^{-31}\ kg}{\left(1{,}1\times10^{29}\frac{1}{m^3}\right)(1{,}60\times10^{-19}\ C)^2(1{,}7\times10^{-8}\ \Omega.m)}$$

$= 1{,}9\times10^{-14}$ s

$\lambda = u.\tau = (1{,}6\times10^{6}$ m/s$)\ (1{,}9\times10^{-14}$ s$) =$ **$3{,}0\times10^{-8}$ m**

CIRCUITOS RC

En los circuitos en que las fem y las resistencias son ***constantes*** (no varían con el tiempo), los potenciales, corrientes y potencias también son independientes del tiempo.

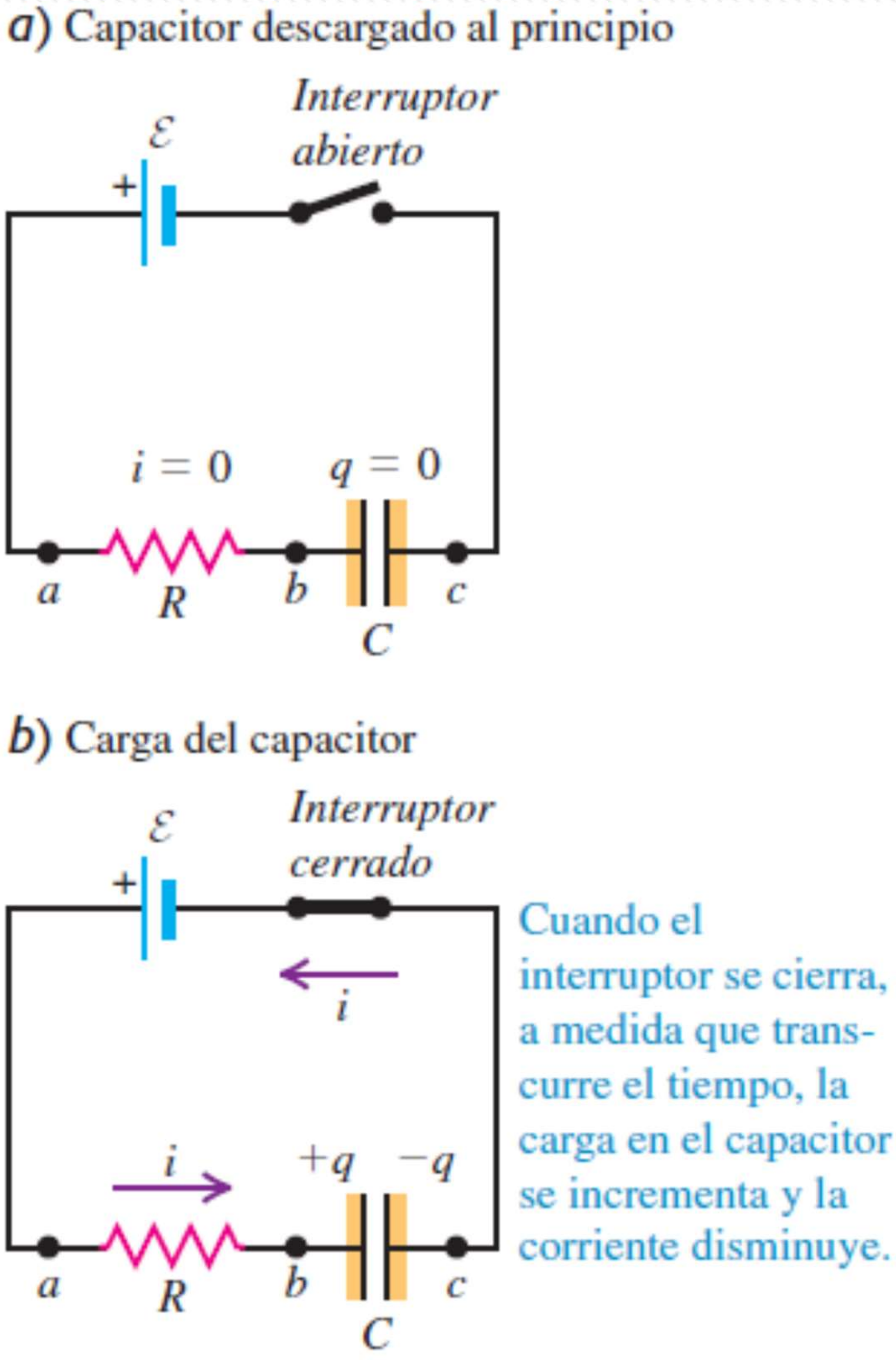
Pero en la carga o descarga de un capacitor se tiene una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias **cambian con el tiempo**.

Muchos dispositivos incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga consecutivamente: semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico, marcapasos…

Realizaremos algunos desarrollos matemáticos: planteamiento de una ecuación diferencial para un circuito RC y la resolveremos, con carácter demostrativo.
El uso de estos métodos matemáticos no serán requeridos en las evaluaciones.

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

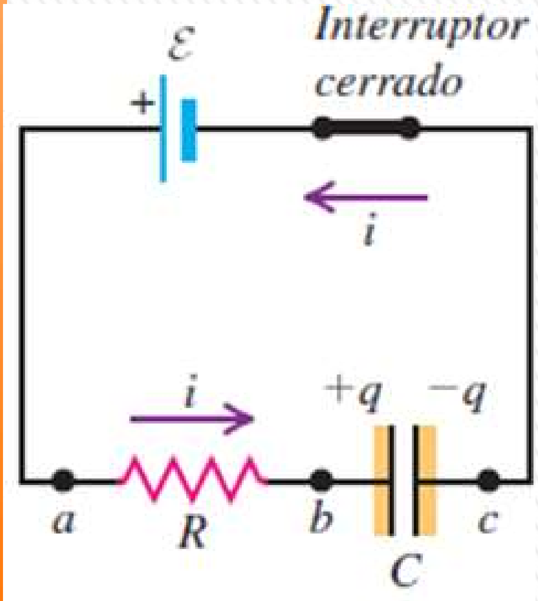
Circuito con resistor y capacitor en serie: **circuito *R-C*.**
Batería ideal fem Ɛ constante (r =0) y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión, salvo el resistor *R*.
Inicialmente capacitor descargado, en *t* = 0, cierro el interruptor.
Circula la corriente alrededor y comienza a cargar el capacitor.



Como el capacitor en *t* = 0 está descargado, la diferencia de potencial v_{bc}=0, y el voltaje v_{ab} a través del resistor *R* es igual a la fem Ɛ; y la corriente inicial a través del resistor, $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

Es decir que en *t* = 0 el capacitor se comporta como un cable (conductor perfecto).

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor



A medida que el capacitor se carga, su voltaje v_{bc} aumenta, mientras que el voltaje del resistor v_{ab}, disminuye, cumpliéndose siempre que: $\mathcal{E} = v_{ab} + v_{bc}$.
Sea ***q*** la carga del capacitor e ***i*** la corriente del circuito, en un instante genérico mientras se carga el capacitor.
Luego de un cierto tiempo, el capacitor se termina de cargar, $i = 0$, por lo que $v_{ab} = i.R = 0$, y $v_{bc} = \mathcal{E}$.
Las diferencias de potencial instantáneas valen:
$v_{ab} = i.R$ y $v_{bc} = q/C$.

Con la regla de Kirchhoff de las mallas, se obtiene

$$\mathcal{E} - i.R - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

En $t = 0$ (interruptor cerrado), capacitor descargado: $q = 0$, por lo que la corriente *inicial* vale $I_0 = \mathcal{E}/R$.

A medida que la q *aumenta*, q/RC *crece* y la carga del capacitor q tiende a su valor final (Q_f), la corriente i disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando $i = 0$:

$$Q_f = \mathcal{E}C$$ no depende de R

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$\boxed{\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Vamos a resolver esta ecuación diferencial

Como: $i = \frac{dq}{dt}$ se tiene que: $\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$ $\qquad \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$

Para integrar ambos miembros cambio las variables de integración a *q'* y *t'* y uso *q y t para los límites superiores, los límites inferiores son q = 0 y t = 0:*

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt' = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \qquad \ln(q' - \mathcal{E}C)\Big|_0^q = -\frac{t'}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad q - \mathcal{E}C = -\mathcal{E}Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = \mathcal{E}C - \mathcal{E}Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

Circuito *R-C*, con capacitor cargándose:

Carga del capacitor — Capacitancia — Carga final del capacitor $= C\mathcal{E}$

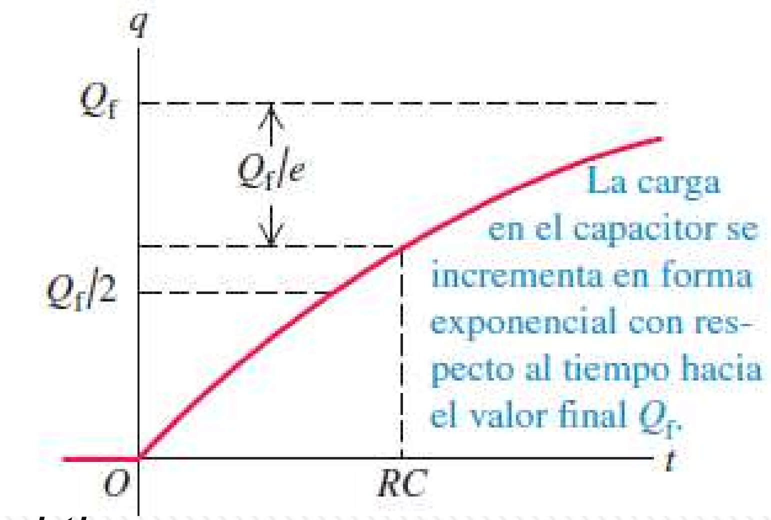
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC})$$

fem de la batería — Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor — Resistencia

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final $Q_f = C\mathcal{E}$.

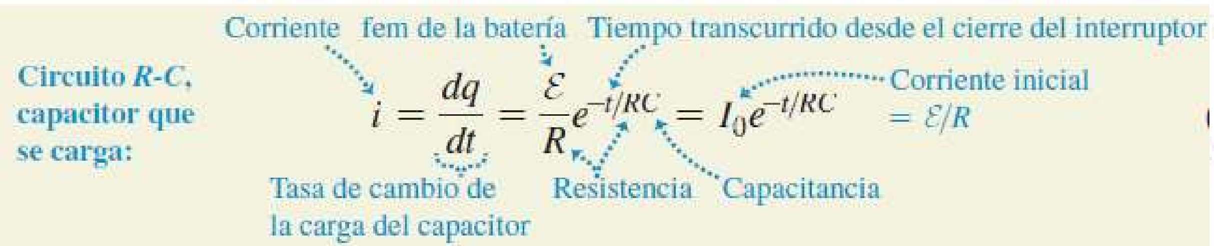


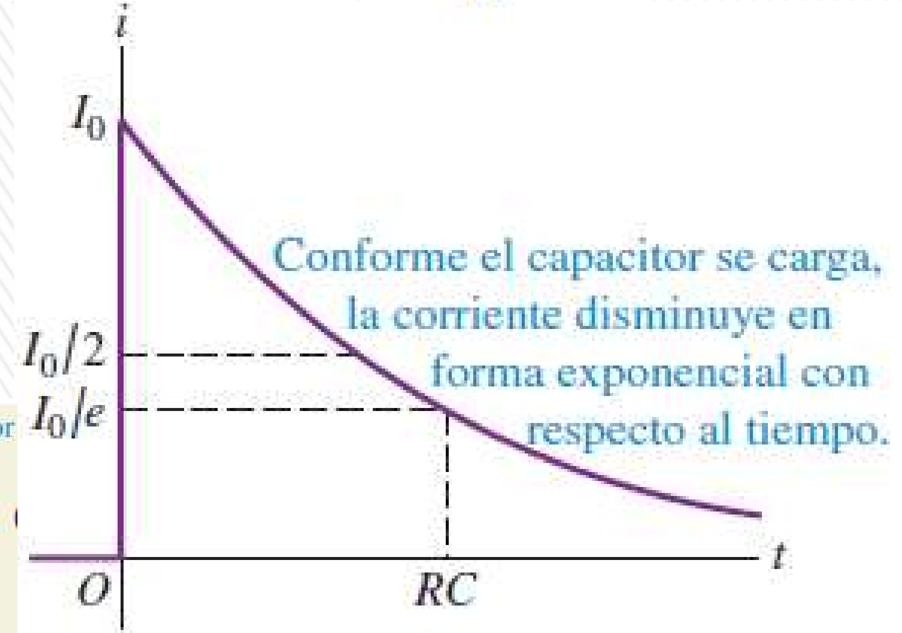
La corriente instantánea *i es la derivada con respecto al tiempo:*

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = \mathcal{E}C\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cuando el interruptor se cierra ($t = 0$), la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; después de eso, tiende gradualmente a cero.





CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

Constante de tiempo - Después de un tiempo igual a *RC* *(t=RC):*

$$i(t=RC) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = I_0 e^{-1} = I_0 \frac{1}{e}$$

$$q(t=RC) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}\right) = Q_f(1 - e^{-1}) = Q_f\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

la corriente ha disminuido a 1/e (alrededor de 0,368) de su valor inicial, y la carga del capacitor ha alcanzado (1 – 1/*e) = 0,632 de su valor final* $Q_f = C\mathcal{E}$.
Por lo tanto, el producto RC es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor.
El término *RC recibe el nombre* de **constante de tiempo o tiempo de relajación** del circuito, y se denota con τ**:**

$$\tau = RC$$

Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo.
Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido.
Si *R está en ohms y C en farads,* τ *está en segundos.*

En un intervalo de tiempo 2τ la corriente desciende a $i(2\tau) = I_0 e^{-2} = 0{,}135 I_0$;
en 3τ: $i(3\tau) = I_0 e^{-3} = 0{,}0498 I_0$
en 10τ: $i(10\tau) = I_0 e^{-10} = 4{,}54\times10^{-5} I_0$

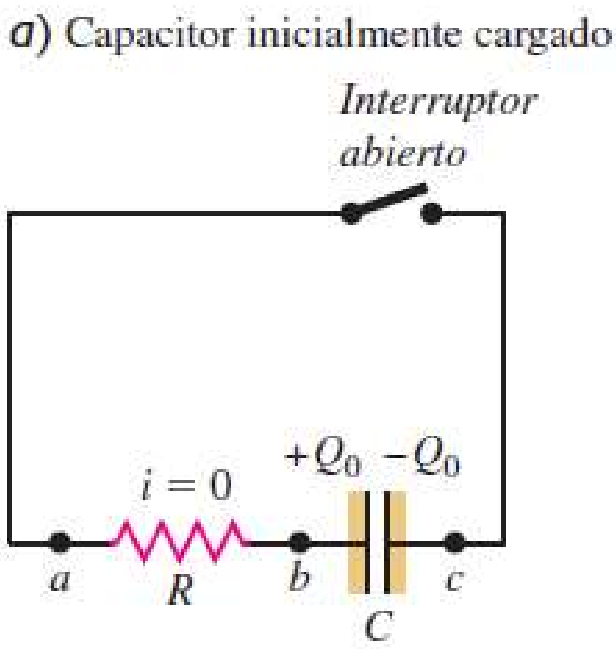
CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

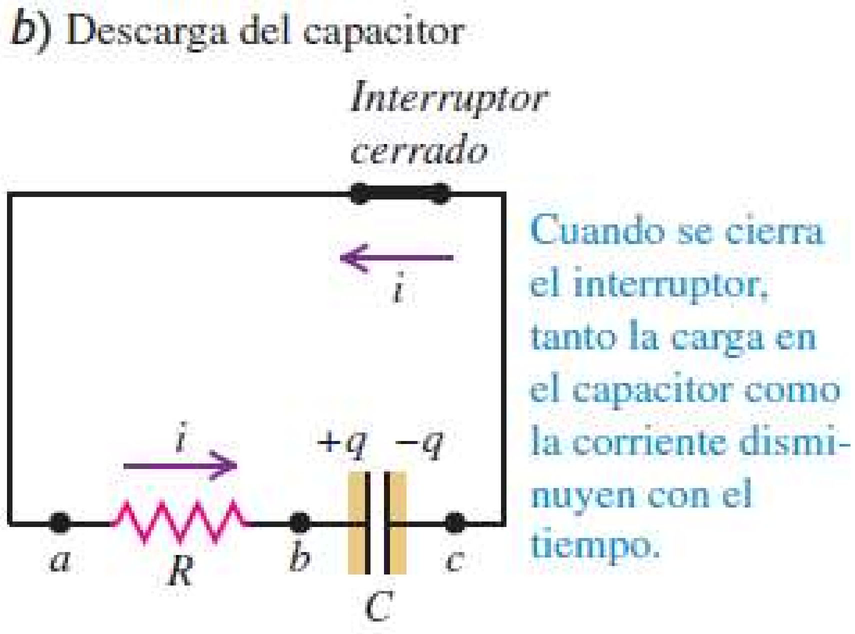
Ahora tengo el capacitor con *una* carga Q_0, *y retiro la batería.*
Cuando cierro el interruptor, supongo que $t = 0$.
$q = Q_0$.
El capacitor se descarga a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.
La regla de Kirchhoff de las mallas da la ecuación anterior pero con $\mathcal{E} = 0$:

$$0 - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

La corriente *i ahora es negativa:*
la carga positiva q ahora sale de la placa izquierda del capacitor*, por lo que la corriente va en* sentido opuesto al que se ilustra en la figura.

En $t = 0$, $q = Q_0$, corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.





CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

Para obtener *q como función del tiempo se reordena la ecuación , de nuevo* se cambian los nombres de las variables a *q y t, y se procede a integrar, los límites para q' son ahora de* Q_0 *a q.*

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt'$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

La corriente instantánea *i es la derivada de esta con respecto al tiempo:*

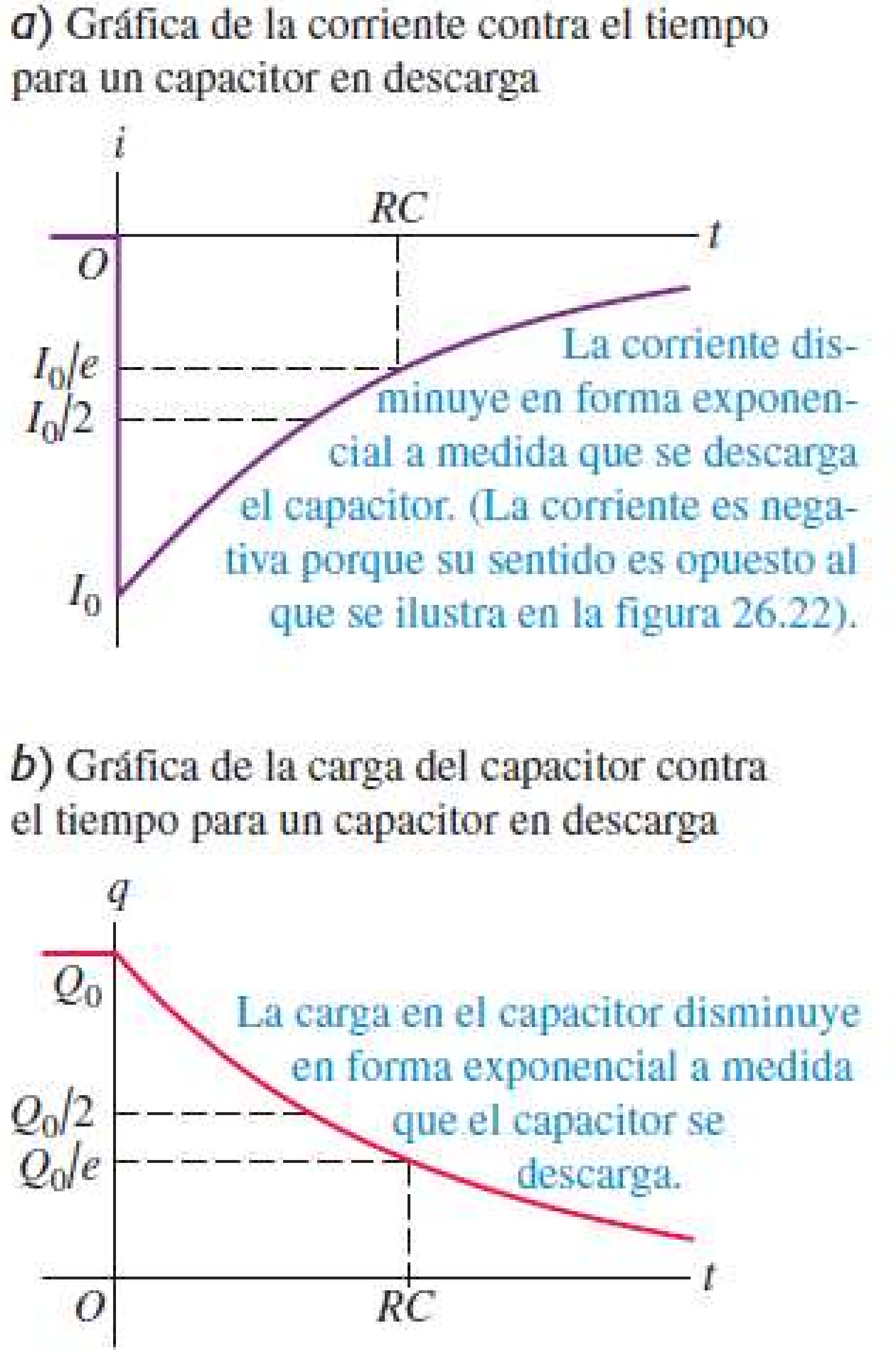
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{\mathrm{RC}}\right) = -\frac{\mathcal{E}C}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{R}} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\mathrm{I}_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

Gráficas de la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo.



En un circuito cuando tengo un capacitor totalmente descargado el mismo se comporta como un cable, mientras que cuando estátotalmente cargado actúa como un interruptor abierto.

CIRCUITO RC BALANCE ENERGÍA

Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$.
La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, *y la tasa a la que la energía se almacena en el* capacitor es $iv_{bc} = iq/C$:

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

Esto significa que de la potencia *suministrada por la batería, una parte se disipa* en el resistor y otra parte *se almacena en el capacitor.*

Energía *total suministrada por la batería durante la carga del capacitor: igual* a la fem $\mathcal{E}$ de la batería multiplicada por el total de la carga Q_f, o $\mathcal{E}.Q_f$
La energía total almacenada en el capacitor es $Q_f\,\mathcal{E}/2$.
Así, exactamente la mitad de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor.
Esta división a la mitad de la energía no depende de *C, R o* $\mathcal{E}$.

Estos resultados se pueden verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia.