Movimiento Browniano y más allá

José Rafael León Ramos
IMERL. UDELAR

Vamos a comenzar con algunos hechos marcantes del desarrollo de la teoría de procesos estocásticos, más bien procesos de difusión. Robert Brown un botánico inglés del siglo XIX observó en 1828 que los granos de polen suspendidos en agua llevaban a cabo un movimiento de enjambre continuo. Brown atribuyó el fenómeno a que las partículas tenían alguna forma de vida, el vitalismo estaba de moda.

Louis Bachelier, en 1900, derivó la ley que gobierna la posición de un simple grano que se mueve como una partícula Browniana en una dimensión y que parte de en el tiempo cero de x_0 y concluyó que

$$\mathbb{P}^{x_0}(X(t) \in dx) = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi(\frac{(x - x_0)}{t})dx.$$

Donde $\varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ es la densidad de la Gaussiana estándar.

Un hecho muy interesante y que une dos teorías físicas: la Teoría del Calor y la difusión de partículas es que la función

$$\varphi(t, x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi(\frac{(x - x_0)}{t}),$$

satisface la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \frac{1}{2}\partial_{xx} u \\ u(0, x) &= \delta_{x_0}(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

Bachelier también señaló la naturaleza Markoviana del Movimiento Browniano (MB).

Esta propiedad se expresa por medio de la relación

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{x_0}(a_1 \le X(t_1) < b_1,\ a_2 \le X(t_2) < b_2, \dots, a_n \le X(t_n) < b_n) \\ = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\dots\int_{a_n}^{b_n} \varphi(t_1, x_0, \xi_1)\varphi(t_2 - t_1, \xi_1, \xi_2) \\ \dots\varphi(t_n - t_{n-1}, \xi_{n-1}, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \quad (2)\end{aligned}$$

La primera consecuencia de esta caracterización fue la determinación usando el método de reflexión de la ley del supremo

$$\mathbb{P}^0(\max_{s\le t} X(s) \le x) = \frac{2}{\sqrt{t}}\int_0^x \varphi(\frac{u}{t})du.$$

Albert Einstein en 1905 también derivó la consecuencia (1), a través de consideraciones de Mecánica Estadística y la utilizó para determinar los diámetros de las moléculas.
Bachelier no pudo dar una descripción formal del MB, siendo sus ideas rechazadas en la época. Tal hecho no sorprende pues el MB necesita de la definición de una medida de probabilidad en un espacio de funciones y no fue hasta 1909 que Émile Borel publicó su clásica memoria: "**Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques**" en ella se daba por primera vez una construcción de la probabilidad en un espacio de dimensión infinita.

No mucho tiempo después, con los trabajos de Borel, Lebesgue y Daniell se creó un marco para establecer sobre bases matemáticas firmes la Teoría del MB. Tal tarea fue acometida, por la primera vez, por Norbert Wiener en 1923.
Entremos en materia entonces.
Sea $C[0,\infty)$ el espacio de las funciones reales continuas con la norma del supremo definimos para cada $\omega \in C[0,\infty)$, definamos las funciones coordenadas $\pi_t(\omega) = \omega(t)$. Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel generada por los abiertos de este espacio.

Tal colección de conjuntos incluye a los eventos elementales

$$B = \{\omega : a \leq \pi_t(\omega) \leq b\}.$$

Wiener estableció la existencia de una medida de probabilidad en $C[0, \infty)$ tal que se cumple la relación (2). Además, se puede decir, que el logro de Wiener le dio sentido formal a las ideas seminales de Bachelier.
Paul Levy, matemático francés, nos legó otra construcción del MB y en su famosa Monografía: "Processus stochastiques et Mouvement Brownien" de 1948, nos dio una descripción profunda de estructura individual de las trayectorias Brownianas.

En particular estudio la variable aleatoria, o más bien el proceso, el tiempo local "mesure du voisinage" en su denominación.

$$\ell(t,x) = \lim_{y \to x} \frac{m\{s:\ x \leq X(s) < y,\ s \leq t\}}{2(y-x)}.$$

Este proceso ha tenido un estudio muy profundo, a partir de los años setenta del siglo pasado. Marc Yor fue uno de los pioneros en este estudio.

Podemos ir un poco más allá. Sea $-\mathcal{L}$ el opedador diferencial definido por

$$-\mathcal{L}f = \sigma^2(x)\partial_{xx}f + b(x)\partial_x f,$$

definamos por $p(t, x_0, x)$ la función de Green del operador

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\mathcal{L}u \\ u(0, x) &= \delta_{x_0}(x) \end{aligned}$$

Esta función comparte diferentes propiedades con el núcleo gaussiano del calor.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq p \\
\int_{\mathbb{R}} p(t,y,x)dx &= 1 \\
p(t,y,x) &= \int_{\mathbb{R}} p(t-s,y,z)p(s,z,x)dz
\end{aligned}
$$

Los procesos ligados a este operador fueron estudiados por Willian Feller y A.N. Kolmogorov y establecieron la conexión entre el operador y las trayectorias de tales procesos. Kiyoshi Itô en 1946 demostró que si

$$|\sigma(x)-\sigma(y)|+|\sqrt{b(x)}-\sqrt{b(y)}|<\mathbf{C}|x-y|.$$

el movimiento asociado a $-\mathcal{L}$ se identifica con la solución continua de la Ecuación Diferencial Estocástica

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \sigma(X(s))dW(s) + \int_0^t b(X(s))ds.$$

Luego W. Feller llevó adelante el siguiente desarrollo. Dado un movimiento Markoviano con trayectorias $X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y con probabilidades $P_x(B)$ sobre un intervalo real I.

Los operadores $P_t[f](x) = \mathbb{E}^x[f(X(t)]$ constituyen un semigrupo $P_{t+s}[f](x) = P_t[P_s[f]](x)$ y además

$$P_t[f](x) = e^{-t\mathcal{L}}[f](x).$$

Con una definición conveniente de la exponencial, siendo así $-\mathcal{L}$ denominado el generador infinitesimal.

Podemos entonces definir el MB. En primer lugar $W(t)$ es un MB si es Gaussiano y continuo. Y satisface

- $\mathbb{E}[W(s)] = 0$ y además $\mathbb{E}[W(s)W(s')] = s \wedge s'$.
- Es un proceso de incrementos independientes esto es $W(s) - W(s')$ y $W(t) - W(t`)$ son independientes siempre que $t' > s$.

A continuación daremos la demostración de Wiener de la existencia de tal proceso.

Sea $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias Gaussianas estándar e independientes. Definamos entonces la siguiente serie

$$B(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\zeta_0 + \sum_{n\geq 1} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k}\zeta_k.$$

Vamos a demostrar que la serie converge uniformemente casi seguramente y satisface las propiedades de un MB. Con este fin introduzcamos la siguiente sucesión

$$s_{mn}(t) = \sum_{m}^{n-1} \frac{\sin kt}{k}\zeta_k \quad t_{mn} = \max_{0\leq\pi} |s_{mn}(t)|.$$

$$t_{m,n}^2 \leq \max_{t\leq\pi} |\sum_{m}^{n-1} \frac{\sin kt}{k} \zeta_k|^2 \leq \sum_{m}^{n-1} \frac{\zeta_k}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} |\sum_{j=m}^{n-l-1} |\frac{\zeta_j\zeta_{j+i}}{j(i+l)}|$$

$$(\mathbb{E}(t_{m,n})^2 \leq (E(t_{m,n}^2))^2 \leq \sum_{m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} (\mathbb{E}(|\sum_{j=m}^{n-l-1} |\frac{\zeta_j\zeta_{j+i}}{j(i+l)}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sum_{m}^{n-1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{l=1}^{n-m-1} (\sum_{j=m}^{n-l-1} \frac{1}{j^2(j+l)^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{n-m}{m^2} + 2(n-m)(\frac{m-n}{m^4})^{\frac{1}{2}}$$

Al poner $n = 2m$, tenemos

$$\mathbb{E}(t_{m,2m}) \leq \sqrt{3}m^{-\frac{1}{4}},$$

de aquí

$$\mathbb{E}[\sum_{n\geq 1} t_{2^{n-1},2^n}] \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(t_{2^{n-1},2^n}) < \infty$$

$$\mathbb{P}[\sum_{n\geq 1} t_{2^{n-1},2^n)} < \infty] = 1,$$

de este hecho y el lema de Weirtrass se tiene la convergencia uniforme en $[0,\pi]$, de lo cual por un cambio de variable se tiene la convergencia en $[0,1]$. Esto es el MB en $[0,1]$ se define por

$$W(t,\omega) = \sqrt{\pi}B(\frac{t}{\pi}) = \frac{t}{\pi}\zeta_0(\omega) + 2\sum_{n\geq 1}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{\sin kt}{k}\zeta_k(\omega).$$

He resaltado el $\omega \in \Omega$, para ilustrar la v.a definida

$$X : \Omega \to C[0,1] \text{ por } X(\omega) = W(\cdot,\omega)$$

está bien definida y tenemos:

1. $W(0,\omega) = 0$.
2. $W(t,\omega)$ es Gaussiana para cada $t \in [0,1]$.
3. Nos resta probar que $\mathbb{E}[W(t)W(s)] = s \wedge t$.

Pero como $\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(u)\mathbf{1}_{[0,t]}(u)du = s \wedge t$, el resultado se obtiene del desarrollo en serie de senos de esas funciones.

Para definir el proceso en $[0, \infty]$ se extiende la definición de Wiener de la siguiente manera sea $\{W_n(t) : 0 \leq t \leq 1, \, n \geq 0\}$ copias independientes del M.B definimos

$$
\begin{aligned}
W(t) &= W_0 \quad (0 \leq t < 1) \\
&= W_0(1) + W_1(t-1) \quad (1 \leq t < 2) \\
&= W_0(1) + W_2(1) + W_2(t-2) \quad (2 \leq t < 3) \\
& etc.
\end{aligned}
$$

Propiedades simples del MB

1. De la fórmula $\mathbb{E}[W(t)W(s)] = s \wedge t$ se obtiene la independencia de los incrementos.
2. $cW(\frac{t}{c})$ es un MB para cualquier constante $c > 0$.
3. $tW(\frac{1}{t})$ para $t > 1$ es un MB esto nos lleva dado que $\mathbb{P}(W(0+) = 0) = 1$ a la LGN para el MB

$$\mathbb{P}[\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = 0] = 1.$$

4. El MB no es diferenciable en ningún punto. Para demostrarlo se prueba que la probabilidad de que sea diferenciable el algún punto es cero.

Una propiedad que es bastante delicada de demostrar es el módulo de continuidad del MB. El ya mencionado Paul Levy demostró que

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{0\leq t_1<t_2\leq 1; t=t_2-t_1\to 0} \frac{|W(t_2)-W(t_1)|}{(2t\log\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}}}=1\Big]=1.$$

En vista del resultado de la no-diferenciabilidad no es posible definir, para cualquier función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, la integral $\int_0^1 f(u)dW(u)$ por medio de la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Paley-Wiener-Zigmund inventaron una receta que funciona bien. Supongamos que la función f es diferenciable y se anula en los extremos. Entonces podemos definir

$$I(f) = \int_0^1 f(u)dW(u) := \int_0^t f'(u)W(u)du,$$

Notemos que la integral de la derecha está bien definida para cualquier función con derivada que es Lebesgue integrable, pues W es una función continua.

Usando las propiedades del MB se ve sin dificultad que $\mathbb{E}[I^2(f)] = \int_0^1 f^2(u)du$. Lo que nos dice que en el dominio de definición I es una isometría de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ en $\mathbb{L}^2([0,1], dx)$.
De esta manera usando la densidad de las funciones diferenciables que se anulan en cero en $\mathbb{L}^2([0,1], dx)$ y la propiedad de isometría se define para cualquier $f \in \mathbb{L}^2([0,1], dx)$

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n), \text{ cuando } \int_0^1 |f_n(u) - f(u)|^2 du \to 0 \text{ y } f_n \text{ diferenciable.}$$

Podemos entonces concluir que hemos definido para cada $f \in \mathbb{L}^2[0,1]$ la variable aleatoria Gaussiana $I(f)$ que llamaremos integral estocástica que satisface:

- $\mathbb{E}[I(f)] = 0$ y $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \langle f, g \rangle$.
- si f tiene una derivada el $\mathbb{L}^2[0,1]$ entonces $I(f) = \int_0^1 f'(t)W(t)dt$.

Considerando el MB definido en $(-\infty, \infty)$ podemos definir al igual que antes $I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dW(t)$. Ahora I será una isometría entre las variables Gaussianas de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ y aquellas de $\mathbb{L}^2(-\infty, \infty)$.

Esta construcción nos permite de introducir el proceso de Orstein-Ulhenbeck. Queremos darle sentido a la Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

$$dX(t) = -X(t) + dW(t).$$

Para resolverla podemos considerar en primer lugar la ecuación homogénea $dX(t) = -X(t)dt$ cuya solución es, $X(t) = Ke^{-t}$ para una constante positiva K ahora bien usamos el método de variación de constante para obtener

$$X(t) = X(-a)e^{-(t-a)} + \int_{-a}^{t} e^{-(t-s)} dW(s).$$

Si suponemos que $X(-a)e^a \to 0$ cuando $a \to \infty$ el proceso de antes converge al proceso

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-s)} dW(s),$$

este proceso es un proceso Gaussiano que verifica $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ y si $t_1 \leq t_2$

$$\mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \langle \mathbf{1}_{(-\infty,t_1]} e^{-(t_1-\cdot)}, \mathbf{1}_{(-\infty,t_2]} e^{-(t_2-\cdot)} \rangle = \frac{1}{2} e^{-(t_2-t_1)}.$$

Este proceso de O-U y es el único proceso estacionario y Markoviano.

Fórmula de Cameron-Martin

Sea una medida Gaussiana en $\mathbb{R}^d$ con media μ y con matriz de covarianza Σ la densidad de tal variable es la función

$$\gamma_\Sigma(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(x-\mu),(x-\mu)\rangle}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|}.$$

Denotemos por X el vector aleatorio con esta distribución si z es un vector de $\mathbb{R}^d$ fijo queremos ver cuál es la densidad de ese vector y explorar su relación con γ_Σ.

La densidad de ese vector resulta ser igual a

$$e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(z-2(x-\mu)),z\rangle}\gamma_{\Sigma}(x).$$

Esta expresión nos indica que si denotamos μ_z la medida del vector trasladado se tiene que

$$\frac{d\mu_z}{d\mu_0} = e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(z-2(x-\mu)),z\rangle},$$

esto es que la medida inducida por la traslación es absolutamente continua con respecto a μ_0. La fórmula de Cameron-Martin es la extensión de esta idea al MB.

Si $\mu = 0$, caso que nos interesa particularmente, obtenemos

$$\frac{d\mu_z}{d\mu_0} = e^{-\frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(z-2x),z\rangle} = e^{\langle z,x\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma^{-1}(z,z\rangle},$$

Sabemos que la medida de Lebesgue es la única medida en $\mathbb{R}^d$ que es invariante bajo traslaciones y hemos visto como se transforman las Gaussianas bajo estas transformaciones. Ahora bien la medida de Lebesgue no existe en un espacio de dimensión infinita, pero la Gaussiana sí. Entonces ¿Cuál es la fórmula para traslación de un vector Gaussiano que toma valores en un espacio de dimensión infinita?

Debemos introducir la forma de integrar con respecto a la medida generada por el MB A manera de ejemplo si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua se tiene

$$\mathbb{E}[F(x_0 + W(t))] = \int_{\mathbb{R}} f(x_0 + x) p_t(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x - x_0) dx.$$

Sea C_n un cilindro de dimension n

$$C_n = \{x \in C[0,1] : \ a_1 \leq x(t_1) \leq b_1 \ldots, a_n \leq x(t_n) \leq b_n\}$$

Entonces

$$\mu_W(C_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} p_{t_1}(x_1) p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$$
$$\ldots p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) dx_1 \ldots dx_n.$$

Notemos al pasar que esta es una de las maneras de construir la medida de Wiener a partir de este sistema coherente de distribuciones finito dimensionales.

De la misma forma si $F_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que depende de una función $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ sólo de los valores $x(t_1), \dots, x(t_n)$. Entonces

$$\int_{C[0,1]} F_n(x(\cdot)) d\mu_W(x(\cdot)) = \mathbb{E}[F_n(W(s) : 0 \le s \le 1)]$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x_1, x_2 \dots, x_n) p_{t_1}(x_1) p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$$
$$\dots p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) dx_1 \dots dx_n$$

Observemos que en la primera igualdad hemos usado la notación probabilística.

Sabemos que $F_n(x(\cdot)) \to F(x(\cdot))$ para toda función $x(\cdot) \in C[0,1]$. Por convergencia acotada tenemos que

$$\int_{C[0,1]} F_n(x(\cdot))d\mu_W(x(\cdot)) \to \int_{C[0,1]} F(x(\cdot))d\mu_W(x(\cdot)).$$

Que se escribe en notación probabilistica

$$\mathbb{E}[F_n(W(s)) : 0 \leq s \leq 1)] \to E[F(W(s)) : 0 \leq s \leq 1)].$$

Veamos algunos casos particulares interesantes.

- En primer lugar consideremos $L(x) = x$ y $G(x) = |x|^p$ para $p \geq 1$. Entonces si $\mathbf{N}$ denota una Gaussiana $N(0,1)$ tenemos

$$\mathbb{E}[\int_0^1 |W(s)|^p ds] = \int_0^1 \mathbb{E}|W(s)|^p ds = \mathbb{E}[|\mathbf{N}|^p] \int_0^1 s^{\frac{p}{2}} ds$$
$$= \mathbb{E}|\mathbf{N}|^p \frac{2}{p+2}.$$

Notemos que no hemos tenido que usar la aproximación.

- Sea $y : C[0,1] \to \mathbb{R}$, queremos calcular

$$\Phi(y(.)) = \mathbb{E}[e^{i \int_0^1 y(s) W(s) ds}] = \int_{C[0,1]} e^{i<y,x>} d\mu_W(x(\cdot)).$$

Así podemos recurrir a la aproximación

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y(\frac{i}{n})W(\frac{i}{n})}].$$

Ahora bien como suma de Gaussianas es Gaussiana se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y(\frac{i}{n})W(\frac{i}{n})$$

es una Gaussiana centrada y con varianza igual a

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y(\frac{i}{n})y(\frac{j}{n})((\frac{i}{n}) \wedge (\frac{j}{n}))$$

$$\to 2\int_0^1 y(t)(\int_0^t y(s)sds)dt := \sigma^2(y(\cdot)).$$

Obteniendo así

$$\Phi(y(.)) = \mathbb{E}[e^{i\int_0^1 y(s)W(s)ds}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{i\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y(\frac{i}{n})W(\frac{i}{n})}]$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(y)} = e^{-\int_0^1 y(t)(\int_0^t y(s)sds)dt}.$$

- Consideremos ahora un caso muy importante para la física. Tenemos $L(z) = e^{-z}$, $G(z) = V(z) > 0$ función que llamaremos potencial y definamos para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F(x(\cdot)) = e^{-\int_0^t V(x_0+x(s))ds} f(x_0 + x(t)),\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Así

$$\int_{C[0,1]} F(x(\cdot))d\mu_W(x(\cdot)) = \mathbb{E}[e^{-\int_0^t V(x_0+W(s))ds} f(x_0 + W(t))]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} V(x_0+W(\frac{j}{n}))} f(x_0 + W(\frac{[nt]}{n}))]$$

Siendo esta última esperanza igual a la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[nt]} V(x_0+x_j)} f(x_0 + x_n))p_{t_1}(x_1 - x_0)p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1)$$

$$\dots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})dx_1 \dots dx_n,$$

y $t_j = \frac{j}{n}$ para $1 \leq j \leq [nt]$.

Estamos interesados en conseguir una fórmula similar a la que se obtuvo en dimensión finita para la traslación por una función. La fórmula, cuya demostración se bosquejará en lo que sigue, fue demostrada en el artículo:

Cameron, R. H.; Martin, W. T. Transformations of Wiener integrals under translations. Ann. Math. (2) 45, 386-396 (1944).

Sea entonces $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ (también podría ser a valores complejos). Además, sea $y(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada, denotaremos por $y'(\cdot)$ a su derivada. Estamos interesados en conseguir una fórmula para

$$\int_{C[0,1]} F(y(\cdot) + x(\cdot)) d\mu_W(x(\cdot)) = \mathbb{E}[F(y(s) + W(s) : 1 \leq s \leq t)].$$

Supondremos que F es continuo para la topología de la convergencia uniforme y es acotado.

Definamos, para cualquier función z en $C[0,1]$, su aproximación por poligonales. Aquí $t_j = \frac{j}{n}$.

$$z_n(s) = z(t_j) + \frac{z(t_{j+1}) - z(t_j)}{t_{j+1} - t_j}(s - t_j), \quad t_j \leq s \leq t_{j+1}.$$

Si definimos $H_n(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)) = F(x_n(\cdot))$ este funcional solo depende de un número finito de valores, los valores de $x(t_j)$ para $1 \leq j \leq n$.

Consideremos la traslación por la función $y(\cdot)$, esto es la función que en cada t vale $y(t) + x(t)$ para una función genérica x del espacio $C[0,1]$. Se tiene trivialmente que la aproximación poligonal de esta última función es $y_n(\cdot) + x_n(\cdot)$.

Entonces

$$\int_{C[0,1]}\int_{C[0,1]} F(x(\cdot)+y(\cdot))d\mu_W(x(\cdot))$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{B_n\subset C[0,1]} F(y_n(\cdot)+x_n(\cdot))d\mu_W(x(\cdot))$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} H(y_1+x_1,\ldots,y_n+x_n)p_{t_1}(x_1)p_{t_2-t_1}(x_2-x_1)$$
$$\ldots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})dx_1\ldots dx_n := I_n,$$

Haciendo el cambio de variable correspondiente

Se obtiene

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \dots, x_n) p_{t_1}(x_1 - y_1) p_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1 - (y_2 - y_1))$$
$$\dots p_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1} - (y_n - y_{n-1})) dx_1 \dots dx_n$$

El producto de las funciones p se puede agrupar de la siguiente forma (similar a lo que hicimos en el caso de dimensión finita)

$$e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}} e^{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})\frac{(y_j - y_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}}$$

Así pasando al espacio $C[0,1]$ obtenemos

$$I_n = \int_{B_n} F(x_n(\cdot)) e^{\sum_{j=1}^{n}(x(t_j)-x(t_{j-1}))\frac{(y(t_j)-y(t_{j-1}))}{t_j-t_{j-1}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(y(t_j)-y(t_{j-1}))^2}{t_j-t_{j-1}}} d\mu_W$$

$$\to \int_{C[0,1]} F(x(\cdot)) e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (y'(s))^2 ds + \int_0^1 y'(s)dx(s)} d\mu_W(x(\cdot)$$

$$= \int_{C[0,1]} F(x(\cdot)+y(\cdot)) d\mu_W(x(\cdot)).$$

En notación de probabilidad se tiene

$$\mathbb{E}[F(y(s)+W(s):0\leq s\leq 1)]$$
$$= \mathbb{E}[F(W(s):0\leq s\leq 1) e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (y'(s))^2 ds + \int_0^1 y'(s)dW(s)}].$$

Esta fórmula también se escribe

$$\mathbb{E}[F(W(\cdot))] = \mathbb{E}[F(W(\cdot) + y(\cdot))e^{-\frac{1}{2}\int_0^1 (y'(s))^2 ds - \int_0^1 y'(s)dW(s)}].$$

- **Formula de Feyman-Kac.**
  Ahora aplicaremos esta fórmula para obtener la expresión asintótica, cuando $h \to 0$ de la esperanza del funcional

$$e^{-\frac{1}{h}\int_0^t V(x_0+\sqrt{h}W(s))ds} f(x_0 + \sqrt{h}W(t)).$$

$$\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{h}\int_0^t V(x_0+\sqrt{h}W(s))ds} f(x_0+\sqrt{h}W(t))]$$
$$= E[e^{-\frac{1}{h}\int_0^t V(x_0+y(s)+\sqrt{h}W(s))ds} f(x_0+y(t)+\sqrt{h}W(t))$$
$$\times\, e^{-\frac{1}{2h}\int_0^t (y'(s))^2 ds - \frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^t y'(s)dW(s)}]$$

Escojamos $y(\cdot)$ que satisface la EDO de Newton (con signo cambiado)

$$\begin{array}{rcl} y''(s) & = & V'(x_0+y(s)) \\ y(0)=0 & & y'(t)=0 \end{array}$$

De esta forma obtenemos

$$\int_0^t y'(s)dW(s) = y'(0)W(0) - y'(t)W(t) - \int_0^t y''(s)W(s)ds$$

$$= \int_0^t V'(x_0 + y(s))W(s)ds$$

Por otra parte usando el desarrollo de Taylor

$$\int_0^t V(x_0 + y(s) + \sqrt{h}W(s))ds$$
$$= \int_0^t V(x_0 + y(s))ds + \sqrt{h}\int_0^t V'(x_0 + y(s))W(s)ds + O(h).$$

Agrupando los desarrollos y poniendo $f = 1$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\lim_{h\to 0} h \log \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{h}\int_0^t V(x_0+\sqrt{h}W(s))ds} f(x_0+\sqrt{h}W(t))] \\
= \int_0^t \frac{1}{2}(y'(s))^2 + V(x_0+y(s))ds = S(y,y',t).
\end{aligned}
$$

Observemos que S es la funcional de acción de la cual la $y(\cdot)$ es un punto crítico.

- **Densidad de transición**
  Consideremos $X(\cdot)$ un proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = dW(t) + b(X(t))dt$$

Si $P_t(f)(x)$ define el semigrupo asociado a la difusión

$$P_t(f)(x) = \mathbb{E}[f(x + X(t))] = \int_I q_t(x, y)f(y)dy,$$

la función p_t es la densidad de transición de la difusión.

Usando una modificación de la fórmula de Cameron-Martin debida a Girsanov se obtiene

$$P_t(f)(x) = \mathbb{E}[e^{\int_0^t \mu(x+W(s))dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \mu^2(x+W(s))ds} f(x+W(t))].$$

Por medio de la fórmula de la probabilidad total obtenemos

$$= \mathbb{E}[e^{\int_0^t \mu(x+W(s))dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \mu^2(x+W(s))ds}|W(t)=y]f(y)]p_t(x-y)dy.$$

El modelo de regresión para vectores Gaussianos nos permite demostrar que esta integral es igual a

$$= \int_I \mathbb{E}[e^{-\frac{t}{2}\int_0^1 \nu(\sqrt{t}B(s)+(1-s)x+sy)ds}]e^{M(x)-M(y)}p_t(x-y)f(y)dy,$$

donde $\nu(x) = \frac{1}{2}[\mu^2(x) + \mu'(x)]$ y $M(x) = \int_0^t \mu(s)ds$.

Por dualidad se verifica que

$$q_t(x,y) = \mathbb{E}[e^{-\frac{t}{2}\int_0^1 \nu(\sqrt{t}B(s)+(1-s)x+sy)ds}]e^{M(x)-M(y)}p_t(x-y).$$

Y desarrollando para t pequeño se verifica la aproximación

$$q_t(x,y) = p_t(x-y)e^{(M(y)-M(x))}(1 - \frac{t}{2(y-x)}\int_x^y \nu(u)du) + o(t)$$

Hemos aplicado este método modificado a la difusión de Wright-Fisher

$$dX(t) = \sqrt{X(t)(1 - X(t))}dW(t).$$