Ejercicios 4 y 5, Actividad 6

1. **Considerar la siguiente afirmación (A) para dos subespacios S, T de V:**

$$\textbf{(A)}\ \forall s, s' \in S, t, t' \in T : s + t = s' + t' \textbf{ implica } s = s', t = t'.$$

Probar que S y T verifican (A) si y sólo si $S \cap T = \{0\}$.

Supongamos que S y T verifican la afirmación (A). Queremos probar la igualdad $S \cap T = \{0\}$.
Es claro que $0 \in S \cap T$ porque ambos son subesacios, por lo que la inclusión $\{0\} \subseteq S \cap T$ es obvia.
Para ver la otra inclusión, tomemos un vector cualquiera $v \in S \cap T$. Como $v + 0 = 0 + v$ son dos descomposiciones de un mismo vector como suma de algo de S y algo de T, por (A) los sumandos de S tienen que coincidir y los sumandos de T también. Esto implica $v = 0$.

Supongamos ahora que $S \cap T = \{0\}$ y probemos que S y T verifican (A).
Sean entonces $s, s' \in S, t, t' \in T$ tales que $s + t = s' + t'$. Sumando a ambos lados el vector $-(s' + t')$ (lo que en criollo es pasar t restando y s' restando) obtenemos $s - s' = t' - t$. Ahora bien $s - s' \in S$ porque $s, s' \in S$ y S es subespacio. Análogamente $t, t' \in T$ Se trata entonces de un elemento en la intersección, que por hipótesis tiene que ser 0. Deducimos $s - s' = 0$ y $t - t' = 0$, de donde $s = s', t = t'$.

2. **Probar que W_1, W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^4$. Calcular su intersección y probar que su suma es $\mathbb{R}^4$:**

$W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$**,** $W_1 = \{(x,0,z,0) \in R^4\}$**,** $W_2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0\}$**.**

Probemos primero que W_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^4$. Para esto, obseremos primero que $(0,0,0,0) \in W_1$ porque su segunda y cuarta coordenadas son 0. Consideremos ahora $w, w' \in W_1, \alpha \in \Bbbk$. Queremos probar que $\alpha w + w' \in W_1$.
Como $w \in W_1$, se tiene que $w = (x,0,z,0)$ para ciertos $x, z \in \mathbb{R}$. Análogamente, $w' = (x',0,z',0) \in \mathbb{R}$.
Ahora bien $\alpha w + w' = (\alpha x + x', 0, \alpha z + z', 0) \in W_1$ porque su segunda y cuarta coordenadas son 0.

Veamos ahora que W_2es un subespacio de $\mathbb{R}^4$. Para esto, obseremos primero que $(0,0,0,0) \in W_1$ porque la suma de sus coordenadas es 0. Consideremos ahora $w, w' \in W_2, \alpha \in \Bbbk$. Queremos probar que $\alpha w + w' \in W_2$.
Como $w \in W_1$, se tiene que $w = (x,y,z,t)$ para ciertos reales x, y, z, t que suman 0. Análogamente, $w' = (x', y', z', t')$ para ciertos reales x', y', z', t' que suman 0.
Ahora bien $\alpha w + w' = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z', \alpha t + t')$. Para saber si es un elemento de W_2, sumemos sus coordenadas:

$$\alpha x + x' + \alpha y + y' + \alpha z + z' + \alpha t + t' = \alpha x + \alpha y + \alpha z \alpha t + x' + y' + z' + t' = \alpha(x+y+z+t) + (x'+y'+z'+t') = \alpha{,}0 + 0 = 0$$

Calculemos ahora $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z,t) \mid y = t = 0$ y $x+y+z+t = 0$.
Las condiciones equivalen a $y = t = 0, z = -x$, de donde

$$W_1 \cap W_2 = \{(x,0,-x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Finalmente, calculemos $W_1 + W_2$. Es claro que es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
Consideremos $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ cualquiera. La igualdad

$$(x,y,z,t) = (x+y, 0, z+t, 0) + (-y, y, -t, t)$$

es una descomposición de v como suma de un elemento de W_1 y uno de W_2, por lo que $v \in W_1 + W_2$.
Esto prueba la inclusión $\mathbb{R}^4 \subseteq W_1 + W_2$. La otra inclusión es obvia, por lo que

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$$