Parcial 1 de Astrofísica estelar
28 de setiembre de 2025
Equivalente al 30 % de la nota total

Declaración: Con la entrega de esta evaluación el estudiante certifica que la misma fue resuelta únicamente por su persona y haciendo uso exclusivo de los materiales de apoyo permitidos y oportunamente informados por el docente del curso. Así mismo, el estudiante deja constancia de su conocimiento del "Reglamento que atiende los casos relativos a acciones de plagio u otros actos fraudulentos" de la Resolución N^o 28 del C.D.C. de 11/XII/2018 – Dist. 1128/18 – D.O. 23/I/2019 que en su artículo 3 establece que en caso de demostrarse fehacientemente la existencia de plagio o fraude, el Consejo de Facultad procederá a sancionar al estudiante mediante la suspensión de su calidad de estudiante durante un período no menor a dos meses ni mayor a doce meses y que la sanción mencionada será registrada en la ficha estudiantil correspondiente.

1. Suponga una estrella de masa M y radio R cuya densidad ρ disminuye con la distancia r al centro de la estrella, desde un valor máximo ρ_c en su centro y hasta anularse en la superficie según la siguiente función:

$$\rho(r) = \rho_c \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

(a) Demuestre que la densidad promedio $\overline{\rho}$ viene dada por $\overline{\rho} = 0{,}4\rho_c$ **(2 puntos)**

Véase por ejemplo el práctico 1, problema 4, partes a, b y c.
Buscamos relacionar $\bar{\rho}$ con ρ_c. Integramos la ecuación de continuidad $dm = 4\pi r^2\rho(r)dr$ para obtener M como función de R para este perfil $\rho(r)$:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi\rho_c \int_0^r r^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) dr = 4\pi\rho_c \int_0^r r^2 - \frac{r^4}{R^2} dr = 4\pi\rho_c \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right)$$

$$M = m(R) = 4\pi\rho_c \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2}\right) \implies M = \frac{8}{15}\pi\rho_c R^3$$

de donde,

$$\rho_c = \frac{15}{8}\frac{M}{\pi R^3}$$

sabemos que:

$$\overline{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

igualamos $M/\pi R^3$ de ambas ecuaciones y finalmente:

$$\rho_c = \frac{15}{8}\frac{4}{3}\overline{\rho} = \frac{10}{6}\overline{\rho} \implies \boxed{\overline{\rho} = 0,4\rho_c}$$

(b) Muestre que si asumimos equilibrio hidrostático la presión central P_c cumple con las siguientes cotas, donde G es la constante de gravitación universal: **(2 puntos)**

$$GM^2/8\pi R^4 < P_c < 0{,}347\ (4\pi)^{1/3}\ GM^{2/3}\rho_c^{4/3}$$

Véase por ejemplo el práctico 1, problema 1 parte b (cota superior) y problema 4, parte e (cota inferior).
Una forma directa de resolver este problema es entender que como conocemos el perfil $\rho(r)$ podemos calcular explícitamente P_c integrando la ecuación de equilibrio hidrostático. Luego solo debemos verificar que ese resultado es consistente con las cotas propuestas. Integramos la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{Gm}{r^2} \implies dP = -\rho\frac{Gm}{r^2}dr \implies \int_{P_c}^0 dP = -G\int_0^R \rho\frac{m}{r^2}dr$$

donde con la ecuación de continuidad obtenemos:

$$\rho\frac{m}{r^2} = \rho_c\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\ \frac{1}{r^2}\ 4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right) = 4\pi\rho_c^2\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right)$$

desarrollamos el producto

$$= 4\pi\rho_c^2\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}-\frac{r^5}{3R^2}+\frac{r^7}{5R^4}\right) = 4\pi\rho_c^2\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5R^2}-\frac{r^3}{3R^2}+\frac{r^5}{5R^4}\right)$$

y el integrando resulta

$$= 4\pi\rho_c^2\left(\frac{r}{3}-\frac{8}{15}\frac{r^3}{R^2}+\frac{r^5}{5R^4}\right)$$

regresamos a la integral

$$\int_{P_c}^{0} dP = -G\int_0^R 4\pi\rho_c^2\left(\frac{r}{3}-\frac{8}{15}\frac{r^3}{R^2}+\frac{r^5}{5R^4}\right)dr \implies P_c = 4\pi G\rho_c^2\left(\frac{R^2}{6}-\frac{8}{60}\frac{R^4}{R^2}+\frac{R^6}{30R^4}\right) = \frac{4}{15}\pi G\rho_c^2R^2$$

y obtenemos una expresión para P_c

$$P_c = \frac{4}{15}\pi G\rho_c^2R^2$$

que podemos reescribir empleando $\rho_c = \frac{1}{0{,}4}\bar{\rho} = \frac{1}{0{,}4}\frac{3M}{4\pi R^3}$

$$P_c = \frac{4}{15}\pi\ G\left(\frac{1}{0,4}\frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}\right)^2 R^2 = \frac{4}{15}\pi\ G\left(\frac{10}{4}\frac{3M}{4\pi R^3}\right)^2 R^2$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{P_c = \frac{15}{16}\frac{G}{\pi}\frac{M^2}{R^4}}$$

La cota inferior $P_c \geqslant \frac{1}{8}\frac{GM^2}{\pi R^4}$ es consistente con el resultado anterior.
Verificamos la cota superior:

$$P_c < 0,347(4\pi)^{1/3}GM^{2/3}\rho_c^{4/3}$$

$$P_c = \frac{15}{16}\frac{G}{\pi}\frac{M^2}{R^4}$$

$$\frac{15}{16}\frac{G}{\pi}\frac{M^2}{R^4} < 0,347(4\pi)^{1/3}G\ M^{2/3}\rho_c^{4/3}$$

$$\rho_c = 0,4\bar{\rho} = 0,4\frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\frac{15}{16}\frac{1}{\pi}\frac{1}{0,347}\frac{1}{(4\pi)^{1/3}} < \frac{R^4}{M^2}M^{2/3}\left(\frac{0,4\times 3}{4\pi}\right)^{4/3}\frac{M^{4/3}}{R^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{(4\pi)^{4/3}}{(4\pi)^{1/3}}\left(\frac{10}{4}\frac{1}{3}\right)^{4/3}\frac{1}{0,347}\frac{15}{16} < 1$$

$$\frac{1}{\pi}4\pi\left(\frac{1}{12}\right)^{4/3}\frac{1}{0,347}\frac{15}{16} < 1$$

y, en efecto,

$$\boxed{0,393363 < 1}$$

(c) Calcule la temperatura central T_c asumiendo que la estrella está constituida por un gas ideal y que su radio, masa y composición química son iguales a las del Sol. Los modelos más completos muestran que para el sol $T_c \sim 15 \times 10^6 K$. ¿Qué significa entonces el valor que obtuvo para T_c? **(4 puntos)**

Véase por ejemplo el práctico 1, problema 6.

$$P_c = n_c K_B T_c$$

$$n_c = n_I + n_e = \frac{\rho_c}{m_H}\left(\frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_e}\right)$$

$$T_c = \frac{P_c}{n_c K_B} = \frac{m_H P_c}{\rho_c K_B \left(\frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_e}\right)}$$

donde $P_c = \frac{15}{16}\frac{G}{\pi}\frac{M_\odot^2}{R_\odot^4}$, $\rho_c = \frac{1}{0{,}4}\bar{\rho}$ y $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_e} = 0{,}61$ (adimensional) y obtenemos:

$$\boxed{T_c = 18,8 \times 10^6 \text{ K}}$$

El valor obtenido es mayor al predicho por los modelos más completos ($15 \times 10^6 K$). Esto significa que asumir un perfil cuadrático para la densidad es incorrecto. La densidad debe ser más suave hacia el centro de modo que ρ_c y P_c sean menores.

(d) Demuestre que si todo el material está ionizado, en su centro la estrella está constituida por un gas ideal y no por un gas degenerado de electrones. **(2 puntos)**

Véase por ejemplo el práctico 4, problema 8.

El gas será ideal siempre que la temperatura de Fermi para los electrones T_F sea menor que la temperatura del gas T

$$T_{\mathrm{F}} = \frac{1}{K_B} E_{\mathrm{F}} = \frac{1}{K_B}\frac{\hbar^2}{2m_e}(3\pi^2 n_e)^{2/3}$$

donde K_B es la constante de Boltzmann y n_e es la densidad numérica de electrones. Necesitamos calcular n_e que será la suma de las densidades numéricas de electrones aportados por cada especie:

$$n_e = \sum_i \mathcal{Z}_i n_i = \frac{\rho}{m_H}\sum_i X_i \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{A}_i} = \frac{\rho}{m_H}\left(X\frac{1}{1} + Y\frac{2}{4} + Z\overline{\frac{\mathcal{Z}_{met}}{\mathcal{A}_{met}}}\right)$$

donde $X = 0{,}707$, $Y = 0{,}274$, $Z = 0{,}019$ y $\overline{Z_{met}/A_{met}} \sim 1/2$

$$n_e = \frac{\rho}{m_H}\left(0{,}707 + 0{,}274\frac{1}{2} + 0{,}019\frac{1}{2}\right) = 0{,}85\frac{\rho}{m_H}$$

donde $m_{\mathrm{H}} = 1{,}673 \times 10^{-24}$ g y $\rho = \bar{\rho} = 1{,}4\ gr/cm^3$:

$$n_e = \frac{0{,}85 \times 1{,}4}{1{,}673 \times 10^{-24}} \simeq 7{,}12 \times 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$$

Calculamos T_F:

$$(3\pi^2 n_e)^{2/3} \simeq (2{,}10 \times 10^{25})^{2/3} \simeq 7{,}8 \times 10^{16}\,\mathrm{cm}^{-2}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e} = \frac{(1{,}054 \times 10^{-27})^2}{2 \times 9{,}11 \times 10^{-28}} \simeq 6{,}09 \times 10^{-28}\,\mathrm{erg\,cm}^2$$

donde $\hbar = 1{,}054 \times 10^{-27}$ erg s, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-28}$ g. Así:

$$E_F = 6{,}09 \times 10^{-28} \times 7{,}8 \times 10^{16} = 4{,}75 \times 10^{-11}\,\mathrm{erg}$$

y

$$T_F = \frac{E_F}{K_B} = \frac{4{,}75 \times 10^{-11}}{1{,}38 \times 10^{-16}} \simeq 3{,}44 \times 10^5\,\mathrm{K}$$

Comparamos con T

$$\boxed{T = 15 \times 10^6\,\mathrm{K} \gg T_{\mathrm{F}} \simeq 3{,}4 \times 10^5\,\mathrm{K}}$$

Concluimos que con esa densidad, temperatura y composicion, en el centro de la estrella, los electrones forman un gas ideal.
Alternativamente podemos llegar a la misma conclusión recordando que la presión en el caso de un gas de e^- degenerado no relativista viene dada por:

$$P_{e,\ \mathrm{deg}} = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

Si P_c correspondiera a una presión degenerada:

$$P_c = \frac{15}{16}\frac{GM^2}{\pi R^4} = P_{e,\ \mathrm{deg}} = K_1 \left(\frac{\rho_c}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

como conocemos ρ_c se puede concluir que la igualdad anterior no ocurre y que $P_c << P_{e,\ \mathrm{deg}}$, es decir la presión dominante es la del gas ideal de iones y electrones.

2. Bajo ciertas condiciones las estrellas tienen capacidad calorífica negativa, es decir, que cumplen:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}M\frac{d\bar{T}}{dt}$$

donde E es la energía total, $\bar{T}$ la temperatura promedio y t el tiempo. Demuestre la expresión y justifíque las condiciones que la estrella debe cumplir. **(5 puntos)**

Véase por ejemplo la deducción hecha en la clase 6.
Las condiciones son dos: Primero, que el gas está en equilibrio hidrostático y segunda, que es un gas ideal. El EH (que nos permite usar el corolario del teorema del virial ($U_g = -2U$) se justifica si el colapso o expansión es lento. La composición de gas ideal no es justificable pues no se dice nada en la letra sobre la masa y radio de la estrella. Simplemente el resultado siguiente es válido sólo si el gas es ideal. De la ecuación de la energía total E sabemos que:

$$\dot{E} = \dot{U} + \dot{K} + \dot{U}_g$$

donde, del teorema del virial en equilibrio hidrostático $\dot{U}_g = -2\dot{U}$ y el equilibrio hidrostático $\dot{K} = 0$:

$$\dot{E} = \dot{U} - 2\dot{U} = -\dot{U}$$

$$\dot{E} = -\dot{U}$$

recordamos que la energía interna de un gas ideal U_{ideal} viene dada por:

$$U_{ideal} = \int u dm = \int \frac{3}{2}\frac{P}{\rho} dm = \frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}\int T dm = \frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}\bar{T}M$$

de donde:

$$\dot{E} = -\dot{U} = -\frac{d}{dt}U_{ideal} = -\frac{d}{dt}\frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}\bar{T}M = -\frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}M\frac{d\bar{T}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{K_B}{\mu}M\frac{d\bar{T}}{dt}}$$

3. Considere una esfera de gas ideal, de masa M y radio R_1, en equilibrio hidrostático y cuyo perfil de densidad es uniforme. Suponga que la esfera es comprimida hasta alcanzar un radio R_2 y un nuevo equilibrio hidrostático en el que también el perfil de densidad es uniforme y su composición continúa siendo de gas ideal. ¿Cómo se comparan entre ambas configuraciones las siguientes cantidades: la energía interna $\overline{U}$, la energía total E, la energía cinética U_K, la energía potencial gravitatoria U_g, la densidad promedio $\overline{\rho(r)}$ y la temperatura promedio $\overline{T}$? **(5 puntos)**

Véase por ejemplo las clases 2 y 6.
Las energías potenciales gravitatorias de ambos estados (inicial=1 y final=2) son:

$$U_{g_1} = -\frac{\alpha_1 GM^2}{R_1} \quad y \quad U_{g_2} = -\frac{\alpha_2 GM^2}{R_2}$$

Como ambos perfiles de densidad son uniformes $\alpha_1 = \alpha_2 = 3/5$ y como $\boxed{R_2 < R_1}$, entonces $\boxed{U_{g_2} < U_{g_1}}$. Además, $K_1 = 0$ y $K_2 = 0$ porque estan en equilibrio hidrostático, por lo que:

$$E_1 = U_1 + U_{g_1} = -\frac{1}{2}U_{g_1} + U_{g_1} = \frac{1}{2}U_{g_1}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}U_{g_2}$$

y como $U_{g_2} < U_{g_1}$ entonces

$$\boxed{E_2 < E_1}$$

Por lo que E disminuye. Por otro lado,

$$E_1 = U_1 - 2U_1 = -U_1 \; y \; E_2 = -U_2$$

$$E_1 > E_2 \Rightarrow \boxed{U_1 < U_2}$$

Por otro lado,

$$U_{ideal} = \frac{3}{2}\frac{K_B}{m_g}\overline{T}M \Rightarrow \; aumenta \; \overline{T}$$

$$\overline{T_2} > \overline{T_1}$$

Estado	R	ρ	U	U_g	E	$\overline{T}$
inicial	R_1	ρ_{c_1}	U_1	U_{g_1}	E_1	T_1
final	$R_2 < R_1$	$\rho_{c_2} > \rho_{c_1}$	$U_2 > U_1$	$U_{g_2} < U_{g_1}$	$E_2 < E_1$	$T_2 > T_1$

4. Considere una estrella en equilibrio térmico e hidrostático que originalmente tenía abundancias químicas solares. Luego de cierto tiempo, posee una estructura constituida por un núcleo inherte de C cuya masa es $M_C = 0{,}1 M_\odot$, rodeado por una cáscara delgada donde predomina el He que se fusiona en C, esta a su vez rodeada por otra cáscara delgada con abundancia solar donde se fusiona H en He y esta a su vez está rodeada por una envolvente constituida por el gas original y en la que no ocurre fusión.

   (a) Demuestre que la densidad $\rho(r)$ es discontinua en dos puntos de la estructura aunque hay tres interfaces. ¿Cuánto cambia la densidad en cada discontinuidad? **(3 puntos)**
   Véase por ejemplo el Práctico 4, Problema 7.
   El origen de las discontinuidades de densidad se da en los interfaces que separan regiones con distintas abundancias químicas (distintos μ) pues como la estrella está en equilibrio hidrostático y térmico, no cambian ni la presión P ni la temperatura T a ambos lados de una interfaz.

$$P_-(r_{int}) = P_+(r_{int}) \qquad ; \qquad T_-(r_{int}) \simeq T_+(r_{int})$$

   Así, las discontinuidades en μ generan entonces discontinuidades en ρ:

$$P = \frac{\rho}{\mu}\frac{K_B T}{m} \implies \frac{\rho_+}{\rho_-} = \frac{\mu_+}{\mu_-} \implies \rho_+ = \frac{\mu_+}{\mu_-}\rho_-$$

   En este caso hay dos interfaces, la que separa al núcleo de C de la cáscara de quema de He y la que separa a ésta última de la cascara de quema de H. Los cambios de densidad en cada interfaz vienen dados por el factor μ_+/μ_- donde cada μ viene dado por:

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{\mu_{\rm I}} + \frac{1}{\mu_{\rm e}} = \sum_i \left(\frac{X_i}{A_i} + \frac{X_i Z_i}{A_i}\right)$$

para el núcleo de C

$$\frac{1}{\mu_C} = \frac{1}{\mu_\mathrm{I}} + \frac{1}{\mu_\mathrm{e}} = \frac{X}{A} + \frac{XZ}{A} = \frac{1}{12} + \frac{6}{12} = \frac{7}{12}, \quad \Rightarrow \quad \mu_C = \frac{12}{7} \simeq 1{,}71$$

para la cáscara de He

$$\frac{1}{\mu_{He}} = \frac{1}{\mu_\mathrm{I}} + \frac{1}{\mu_\mathrm{e}} = \frac{1}{4} + \frac{1\times 2}{4} \Longrightarrow \quad \mu_{He} = \frac{4}{3} \simeq 1{,}33$$

para la cáscara de H la abundancia es solar y sabemos que:

$$\mu_\odot = \frac{1}{1{,}62} \approx 0{,}61$$

Para la primera interfaz:

$$\rho_C = \frac{\mu_C}{\mu_{He}}\rho_{He} = \frac{1{,}71}{1{,}33}\rho_{He} = 1{,}28\ \rho_{He}$$

Para la segunda interfaz:

$$\rho_{He} = \frac{\mu_{He}}{\mu_\odot}\rho_H = \frac{1{,}33}{0{,}61}\rho_H = 2{,}16\ \rho_H$$

(b) ¿Cuánta energía ha generado por fusión nuclear el núcleo estelar de ^{12}C a lo largo de toda su historia? **(7 puntos)**

Emplearemos únicamente la definición de energía generada por una reacción (véase clases 9 y 10). El núcleo se formó por la fusión de H en ^4He y luego de ^4He en ^{12}C. La energía liberada por cada uno de los procesos será $Q_{total} = \sum_i Q_i\ N_i$ donde Q_i es la energía generada en una reacción i y N_i el número de reacciones i ocurridas. Las Q_i son conocidas y necesitamos calcular las N_i. En este caso, el núcleo de la estrella tiene el siguiente número de núcleos de ^{12}C:

$$\#_C = \frac{M_C}{m_C}$$

donde M_C es la masa del núcleo estelar y m_C es la masa del núcleo de ^{12}C. Como la reacción 3α convierte 3 núcleos de ^4He en 1 de ^{12}C quiere decir que han ocurrido un total de $N_{3\alpha} = \#_C$ reacciones 3α y que originalmente había $3\times\#_C$ núcleos de ^4He. Análogamente en la reacción $p-p$ se convierten 4 núcleos de H en 1 nucleo de He, es decir que han ocurrido un total de $3\times\#_C\times 0{,}707$ reacciones $p-p$ donde $X = 0{,}707$ es la fracción original de H y había originalmente $12\times\#_C\times 0{,}707$ núcleos de H. Entonces:

$$Q_{total} = Q_{3\alpha}\ N_{3\alpha} + Q_{p-p}\ N_{p-p} = Q_{3\alpha}\frac{M_C}{m_C} + Q_{p-p}\frac{3XM_C}{m_C} = \frac{M_C}{m_C}\left(Q_{3\alpha} + 3XQ_{p-p}\right)$$

donde

$$\#_C = \frac{0{,}1\,M_\odot}{m(^{12}\mathrm{C})} = \frac{0{,}1\,M_\odot}{12\,m_u} = \frac{0{,}1\times 1{,}98847\times 10^{30}\ \mathrm{kg}}{12\times 1{,}6605390666\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 9{,}98\times 10^{52}$$

además, $Q_{p-p} = 26{,}731\ MeV$ y $Q_{3\alpha} = 7{,}275\ MeV$. Finalmente,

$$Q_{total} = 9{,}98\times 10^{52}\,[7{,}275 + (3\times 0{,}707\times 26{,}731)] = 6{,}38\times 10^{54} MeV$$