

Cuarto ejercicio de entrega. Estados coherentes del oscilador armónico

Entrega Grupo 2 y corrige Grupo 1.

Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

y llamemos $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ a base de autoestados normalizados de energía $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Un estado coherente (o cuasi-clásicos) se define por

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

1. Expanda $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ y demuestre que $c_n = \alpha^n c_0 / \sqrt{n!}$. Luego normalice el estado y concluya que

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Sugerencia: proyecte la expansión sobre la base de autoestados de H y resuelva de manera iterativa usando $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Recuerde la serie de Taylor de la exponencial.

2. Calcule $\langle a \rangle$, $\langle a^\dagger a \rangle$ y las incertidumbres $(\Delta x)^2$, $(\Delta p)^2$ con

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a),$$

y compruebe que $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ (minimizan la incertidumbre).

3. Escriba la ecuación diferencial que define los estados coherentes en la base de posición y pruebe que las soluciones son gaussianas. ¿Que relación guardan estos estados con el estado de mínima energía?

4. *Evolución en el tiempo* Pruebe que el estado coherente tal que $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ evoluciona en el tiempo al estado coherente $|\alpha(t)\rangle$ donde $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$.

Para ello pruebe que $[H, a] = -\hbar\omega a$ y considere el estado $|\chi(t)\rangle \equiv a|\psi(t)\rangle - \alpha(t)|\psi(t)\rangle$ donde ψ es nuestro estado de interés y $\alpha(t)$ es una función a determinar. Sustituya en la ecuación de Schrödinger de manera que $|\chi(t)\rangle = 0$ y concluya.

5. Usando los dos resultados anteriores escriba la forma explícita de las funciones de onda $\psi(x, t)_\alpha$ de los estados coherentes y compárelo con el oscilador armónico clásico.

Rúbrica para calificación de entregas: será **Muy Insuficiente** un trabajo que no logre cubrir los cinco puntos de la propuesta o lo haga con errores conceptuales graves. Será **Insuficiente** un trabajo que logre cubrir los cinco puntos con algunos errores conceptuales o con errores de

cálculo importantes. Será **Aceptable** un trabajo que logre completar los cinco puntos con errores de cálculo o conceptuales menores y sea presentado de forma prolija. Será **Bueno** un trabajo que logre los cinco puntos sin errores y sea presentado de forma prolija. Será **Muy bueno** un trabajo que logre desarrollar los cinco puntos sin errores, con claridad en los conceptos y con una presentación prolija. Será **Excelente** un trabajo que logre cubrir los cinco puntos con total claridad y prolijidad, sin errores, de manera que el material sea un insumo para explicar el tema a otros estudiantes.

Rúbrica para calificación de correcciones: será **Muy Insuficiente** una corrección que demuestre no haber leído el trabajo en su totalidad. Será **Insuficiente** una corrección que no detecte errores graves u omisiones importantes en el trabajo. Será **Aceptable** una corrección que detecte posibles errores y los transmita al estudiante que entrega. Será **Buena** una corrección que transmita los errores encontrados de forma clara. Será **Muy buena** una corrección que ayude a corregir todos los errores del trabajo. Será **Excelente** una corrección que permita corregir todos los errores del trabajo y sea transmitida de forma clara y ordenada.