

PRIMER PARCIAL

1. (a) Para los siguientes problemas de Cauchy en la recta decidir si existe una solución definida en un entorno del tiempo inicial.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sin(tx) \\ x(0) = 1; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x\dot{x} + 2t = 0 \\ x(1) = 0. \end{array} \right.$$

- (b) En caso de una respuesta afirmativa en la parte anterior, ¿hay una solución definida para todo $t \in \mathbb{R}$? *Sugerencia: puede ser útil considerar la forma integral de la ecuación diferencial, es decir, la igualdad de la forma $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.*

2. Se considera el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{array} \right.$$

- (a) Probar que las soluciones cumplen que $x(t)^2 + y(t)^2$ es constante.
(b) Bosquejar el diagrama de fase (es decir, dibujar las imágenes de las soluciones e indicar el sentido de las trayectorias).

**No se permite usar material.
Justificar todas las respuestas.**

Solución

1. (a) En el primer caso la ecuación es de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 (pues tanto el producto como la función seno lo son), luego es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Por el Teorema de Picard el problema tiene solución en un entorno de $t = 0$.

Para el segundo problema no puede haber solución porque si $x(1) = 0$, entonces debería cumplirse $0 = 2x(1)\dot{x}(1) + 2 = 2$.

De hecho, la segunda ecuación es exacta, es decir, tiene la forma

$$\frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0,$$

donde $h(t) = t^2 + x^2$. Esto implica que si $x(t)$ es solución de la ecuación, entonces $h(t, x(t))$ es constante y por lo tanto el gráfico de x está contenido en una curva de nivel de h .

La curva de nivel de h que contiene al punto $(1, 0)$ es un círculo de centro 0 y radio 1. Si el problema tiene solución $x(t)$ con condición inicial $x(1) = 0$ definida en un entorno de $t = 1$, entonces su gráfico debe contener un arco de círculo que sea entorno del punto $(1, 0)$. Pero esto no es posible porque ningún arco de esta forma puede ser el gráfico de una función.

- (b) Observar que la solución maximal del primer problema debe cumplir

$$x(t) = 1 + \int_0^t \sin(sx) ds.$$

Luego para todo t en el intervalo de definición de x (notado por I) se tiene

$$|x(t)| \leq 1 + \int_0^t |\sin(sx)| ds \leq 1 + |t|. \quad (1)$$

Para todo $L > 0$ consideramos el compacto $K_L = [-L, L] \times [1 - L, 1 + L]$. Por el Teorema de Escape de Compactos existen $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 < 0 < t_2$ tal que $(t_1, x(t_1)), (t_2, x(t_2)) \notin K$. Por (1) no puede darse $t_1 \in [-L, L]$ ni $t_2 \in [-L, L]$, por lo que $[-L, L] \subset I$. Como L es arbitrario concluimos $I = \mathbb{R}$.

2. (a) Puede considerarse la función $F(x, y) = x^2 + y^2$, luego si $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ es una solución, se tiene

$$(F \circ \varphi)'(t) = \nabla F(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (2x(t), 2y(t)) \cdot (-y(t), x(t)) = 0.$$

Luego la composición $F \circ \varphi(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ es constante.

Otra forma de verlo es observando que el sistema es de la forma $\dot{X} = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La exponencial de A es

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Luego las soluciones son de la forma $e^{tA}(x_0, y_0)$, y como e^{tA} es una matriz de rotación para todo t , resulta $\|e^{tA}(x_0, y_0)\| = (x_0, y_0)$ y luego $x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$.

- (b) Observar que como en $(x_0, 0)$ la derivada de la solución que pasa por dicho punto es $(0, x_0)$, entonces las soluciones se orientan en sentido antihorario (también puede observarse que e^{tA} es una matriz de rotación de ángulo t en sentido antihorario.) Luego el diagrama de fase queda:

