

Parcial 1

2hs de tiempo con acceso a material de clase.

1. Operadores de carga y conjugación de carga.

Considere un sistema donde la carga es un observable y toda partícula tiene una antipartícula de carga opuesta. Ignorando otros grados de libertad se puede definir el observable de carga Q y su base ortonormal de autoestados como

$$\begin{aligned} Q|q\rangle &= q|q\rangle \\ \langle q|q'\rangle &= \delta_{q,q'} \end{aligned}$$

También definimos un operador (unitario) de conjugación de carga C que cumple

$$\begin{aligned} QC + CQ &= 0 \\ C^\dagger &= C^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

- a) Pruebe que C lleva partículas en sus antipartículas (es decir $C|q\rangle = A(q)|-q\rangle$).
Sugerencia: aplique la definición (1) sobre un elemento de la base de autoestados de Q .
- b) Pruebe que la forma más general de C es

$$C|q\rangle = e^{i\theta(q)}|-q\rangle \tag{3}$$

Sugerencia: calcule el módulo del vector transformado $C|q\rangle$ usando la definición (2) para probar que $A(q)$ es un número complejo de amplitud 1.

De ahora en adelante considere el caso simplificado donde el espacio de estados es de dimensión dos (sólo dos cargas posibles ± 1). Llamemos $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ a una base ortonormal de autoestados de Q dada por

$$\begin{aligned} Q|+\rangle &= |+\rangle \\ Q|-\rangle &= -|-\rangle. \end{aligned}$$

Además considere el caso particular donde C está dado por

$$\begin{aligned} C|+\rangle &= i|-\rangle \\ C|-\rangle &= -i|+\rangle. \end{aligned}$$

- c) En este caso:
- 1) Encuentre la forma matricial de Q y C en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$
 - 2) Pruebe que $C^2 = \text{Id}$ y que C es un observable. ¿Pueden medirse C y Q simultáneamente? Justifique.
- d) Obtenga una base de autoestados de C , que llamaremos $\{|\varphi_+\rangle, |\varphi_-\rangle\}$ y pruebe que son estados neutros, es decir que

$$\langle \varphi_\pm | Q | \varphi_\pm \rangle = 0$$

2. Un sistema de espín $1/2$ está sometido a un Hamiltoniano

$$H = \omega (3S_x + 4S_z),$$

donde

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

y $\omega > 0$ es una constante conocida. Mediante un aparato de Stern-Gerlach, el espín se prepara inicialmente en el autoestado de S_z con valor $+\hbar/2$:

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_z.$$

- a) Escriba H como matriz 2×2 en la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ y encuentre sus **autovalores** y **autovectores**.
- b) Obtenga el estado a tiempo t : $|\psi(t)\rangle$.
- c) Determine la **probabilidad** de medir $S_z = +\hbar/2$ en función del tiempo t .
- d) Describa cómo oscila esta probabilidad y cuál es su **frecuencia característica**.

Rúbrica para calificación de parcial: será **Muy Insuficiente** un trabajo que no logre cubrir ninguno de los ejercicios o lo haga con errores conceptuales graves en ambos. Será **Insuficiente** un trabajo que logre cubrir ambos ejercicios con algunos errores conceptuales o con errores de cálculo importantes. También será **Insuficiente** un trabajo que logre cubrir sólo uno de los ejercicios sin errores conceptuales graves o de cálculo importantes. Será **Aceptable** un trabajo que logre completar ambos ejercicios con errores de cálculo o conceptuales menores. Será **Bueno** un trabajo que logre completar un ejercicio sin errores conceptuales o de cálculo y el otro con errores conceptuales o de cálculo menores. Será muy bueno un trabajo que logre completar ambos ejercicios sin errores conceptuales y con algunos errores de cálculo. Será **Excelente** un trabajo que logre cubrir ambos ejercicios sin errores (o con errores de cálculo muy menores).

Solución:

1. Operadores de carga y conjugación de carga

- a) Aplicando la ecuación (1) sobre un autoestado de Q :

$$QC|q\rangle = -CQ|q\rangle = -Cq|q\rangle = -qC|q\rangle.$$

Comparando el inicio y el final vemos que $C|q\rangle$ es un autoestado de Q con autovalor $-q$. Por la letra del ejercicio debe ser $C|q\rangle \propto |-q\rangle$ y se obtiene el resultado.

- b) Calculando $\|C|q\rangle\|^2 = \langle q|C^\dagger C|q\rangle = 1$. Por otro lado $\|C|q\rangle\| = \|A(q)|-q\rangle\| = \|A(q)\|$ y se concluye el resultado.

- c) En la base propuesta las matrices son

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba explícitamente que $[C]^2 = 1$, que $[C]^\dagger = [C]$ y que $[Q][C] \neq [C][Q]$. Por lo tanto ambos son observables pues son hermíticos sobre un espacio de dimensión finita, pero no son compatibles pues no conmutan. Esto impide medirlos simultáneamente de manera no ambigua.

- d) Diagonalizando C en la base de autoestados de Q se obtiene $|\varphi_\pm\rangle = \frac{|+\rangle \mp i|-\rangle}{\sqrt{2}}$ y se calcula explícitamente que el valor esperado de Q es cero en ambos estados.

2. Sistema de espín 1/2

- a) Usando las matrices de Pauli se obtiene que el Hamiltoniano es

$$[H] = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sus autovalores son $E_\pm = \pm \frac{5\hbar\omega}{2}$ y sus autoestados son $|\varphi_+\rangle = \frac{3|+\rangle_z + |-\rangle_z}{\sqrt{10}}$ y $|\varphi_-\rangle = \frac{|+\rangle_z - 3|-\rangle_z}{\sqrt{10}}$.

- b) Dado que la condición inicial es

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_z = \frac{3|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{10}}$$

entonces el estado a tiempo t es

$$|\psi(t)\rangle = \frac{3|\varphi_+\rangle \exp(-iE_+t) + |\varphi_-\rangle \exp(-iE_-t)}{\sqrt{10}}.$$

- c) Partiendo de que $P(S_z = +\hbar/2) = |{}_z\langle +|\psi(t)\rangle|^2$ se obtiene que

$${}_z\langle +|\psi(t)\rangle = \frac{3{}_z\langle +|\varphi_+\rangle \exp(-iE_+t) + {}_z\langle +|\varphi_-\rangle \exp(-iE_-t)}{\sqrt{10}} = \frac{9\exp(-iE_+t) + \exp(-iE_-t)}{10}$$

y luego

$$P(S_z = +\hbar/2) = \frac{82}{100} + \frac{18}{100} \cos([E_+ - E_-]t/\hbar) = \frac{82}{100} + \frac{18}{100} \cos(5\omega t)$$

- d) La probabilidad oscila entre $\frac{64}{100}$ y 1 con frecuencia de Larmor $\omega_L = 5\omega$. Notar que el Hamiltoniano se puede escribir como $H = \gamma \vec{B} \cdot \vec{S}$ con $\gamma \vec{B} = \omega(3\hat{x} + 4\hat{z})$ y por tanto $\omega_L = |\gamma \vec{B}| = 5\omega$.