

Repartido 5. Momento angular y rotaciones

1. Sea $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ el operador de momento angular orbital de un sistema cuyo espacio de estados es $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ (espacio de funciones de la posición).

Calcule las relaciones de conmutación siguientes:

- a) $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$
- b) $[L_i, R_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}R_k$
- c) $[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k$
- d) $[L_i, \vec{P}^2] = [L_i, \vec{R}^2] = [L_i, \vec{R} \cdot \vec{P}] = 0$

2. Partiendo de $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ en la representación de posición $\{|\vec{r}\rangle\}$, muestre que

$$\vec{L} = -i\hbar \left(\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{e}_\theta \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

en coordenadas esféricas.

3. Calcule las matrices J^2 , J_z , $J_\pm$, J_x y J_y para $j = 1$. Verifique las relaciones de conmutación de las mismas.

4. a) Pruebe que para una partícula en un potencial $V(\vec{r})$ la tasa de cambio del valor esperado del momento angular orbital $\vec{L}$ es igual al valor esperado del torque $\vec{M} = \vec{R} \times (-\nabla V)$ (análogo rotacional del Teorema de Ehrenfest)

$$\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{M} \rangle$$

b) Muestre que $\frac{d}{dt}\langle \vec{L} \rangle = 0$ para cualquier potencial central $V(\vec{r}) = V(r)$. Esto es un enunciado cuántico de la conservación del momento angular.

5. Un haz de partículas se somete a una medida simultánea de las variables de momento angular $\vec{L}^2$ y L_z . Los resultados que arroja la medida son los autovalores de índices $(l = 0, m = 0)$ con probabilidad $3/4$ y $(l = 1, m = -1)$ con probabilidad $1/4$.

a) Escriba una expresión para el estado del haz inmediatamente antes de la medida.

b) Las partículas del haz con $(l = 1, m = -1)$ son separadas y sometidas a una medida de L_x , ¿cuáles son los posibles resultados y sus probabilidades?

c) Construya las funciones de onda espaciales que pueden resultar de la segunda medida.

6. Un sistema tiene por función de onda $\psi(x, y, z) = N(x + y + z)e^{-r^2/a^2}$, con N una constante de normalización y a real.

Los observables L_z y $\vec{L}^2$ son medidos, ¿cuáles son los posibles resultados y cuánto vale la probabilidad de obtener $L_z = 0$ y $L^2 = 2\hbar^2$?

Recordar que :

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (1)$$

b) Si se usa también que:

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp 1 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i \varphi}$$

¿es posible predecir directamente las probabilidades de todos los posibles resultados de medir $\vec{L}^2$ y L_z en el sistema de la función de onda $\psi(x, y, z)$?

7. Halle la matriz que representa a S_x para una partícula de spin $3/2$, usando la base de estados propios de S_z . Determine los valores propios de S_x .

8. a) Usando que la rotación geométrica infinitesimal de un vector $\vec{v}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ con eje $\hat{u}$ y ángulo $d\alpha$ se escribe como $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)(\vec{v}) = \vec{v} + d\alpha \hat{u} \times \vec{v}$, muestre que a primer orden en $d\alpha$ y $d\beta$ se cumple la ecuación vista en clase:

$$\mathcal{R}_{\hat{y}}(-d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(-d\beta) = \mathcal{R}_{\hat{z}}(d\beta d\alpha) \quad (2)$$

que muestra la diferencia entre aplicar dos rotaciones en orden distinto: $\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)(\vec{v})$ y $\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)(\vec{v})$ (no conmutatividad de las rotaciones).

b) Muestre que esta fórmula, al sustituirse las rotaciones geométricas por los operadores de rotación cuánticos $R_{\hat{u}}(d\alpha) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{J} \cdot \hat{u}$ nos da la relación de conmutación de las componentes del momento angular $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$

9. El hamiltoniano de un oscilador armónico en tres dimensiones, cuya energía potencial depende de dos coordenadas (x e y) es:

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (X^2 + Y^2) = H_z + H_{xy}$$

con :

$$H_z = \frac{P_z^2}{2m}$$

$$H_{xy} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 + \frac{1}{2m} P_y^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 Y^2 = H_x + H_y$$

El término H_{xy} es suma de dos osciladores armónicos. Si se define:

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} P_x$$

$$a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Y + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} P_y$$

entonces $H_{xy} = \hbar\omega \left(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1 \right) = \hbar\omega (N_x + N_y + 1)$.

Un estado propio de H_{xy} es el producto $|\phi_{nx,ny}\rangle = |\phi_{nx}\rangle |\phi_{ny}\rangle$. A partir del estado base $|\phi_{00}\rangle$ se obtiene como:

$$|\phi_{nx,ny}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x!n_y!}} (a_x^\dagger)^{n_x} (a_y^\dagger)^{n_y} |\phi_{00}\rangle$$

a) Halle los niveles de energía E_n de este oscilador en dos dimensiones, determinando los valores de n . Muestre que son degenerados.

b) Muestre que la componente z del momento angular $L_z = XP_y - YP_x$ se escribe

$$L_z = i\hbar \left(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y \right)$$

Demuestre que $[H_{xy}, L_z] = 0$.

c) Se define ahora los operadores:

$$a_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - ia_y) \quad a_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + ia_y)$$

Demuestre que en términos de éstos:

$$\begin{aligned} H_{xy} &= \hbar\omega \left(a_R^\dagger a_R + a_L^\dagger a_L + 1 \right) = \hbar\omega (N_R + N_L + 1) \\ L_z &= \hbar \left(a_R^\dagger a_R - a_L^\dagger a_L \right) = \hbar (N_R - N_L) \end{aligned}$$

y que los estados construidos como:

$$|\chi_{nR,nL}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_R!n_L!}} (a_R^\dagger)^{n_R} (a_L^\dagger)^{n_L} |\phi_{00}\rangle$$

son estados propios de H_{xy} con valores propios $n\hbar\omega$ ($n = n_R + n_L + 1$) y estados propios de L_z con valores propios $m\hbar$ ($m = n_R - n_L$). Interprete estos resultados.