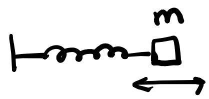
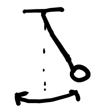
Oscilaciones

→ Movimiento que se repite



masa - resorte



péndulo

Movimiento armónico simple

$x=0$ → posición de equilibrio

Fe fuerza elástica

$F_e = -kx$ → ley de Hooke

x → posición

k → constante elástica (depende del resorte)

2da ley de Newton: $F_{neta} = ma$

$= F_e \rightarrow a = \frac{F_e}{m} = -\frac{k}{m}x$

$= -kx$

Podemos escribir la aceleración como una derivada

$$v \sim \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}$$

$$a \sim \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

ecuación para es sistema masa - resorte

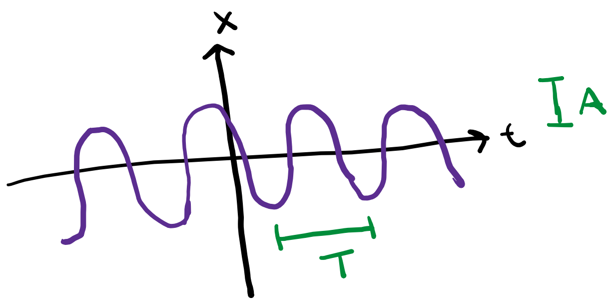
Definimos la frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ → $\omega^2 = \frac{k}{m}$ → $[\omega] = \frac{rad}{s}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dx^2}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

ecuación para un movimiento armónico simple

→ oscilador armónico

Solución: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$



- A amplitud
- T periodo: tiempo que se demora en completar un ciclo, $[T] = s$
- f frecuencia: cantidad de ciclos que puedo completar en un segundo.

  $[f] = Hz$ Hertz

  $f = \frac{1}{T}$
- ω frecuencia angular

  $\omega = 2\pi f$

- ϕ angulo de fase → relacionado con la posición inicial

  $[\phi] = rad$

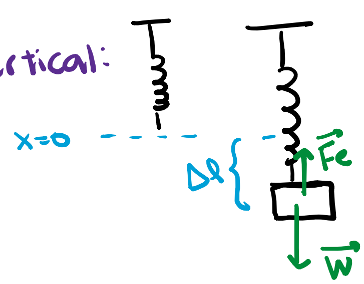
Condiciones iniciales: en $t=0$

posición x_0
velocidad v_0

$x_0 = A\cos\phi \rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$

$$\begin{cases} \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \\ A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

MAS vertical:



- equilibrio: $F_e = W$

  $k\Delta l = mg$

- no equilibrio: $F_{neta} = mg - kx$

  $= W - F_e$

$F_{neta} = k\Delta l - kx$

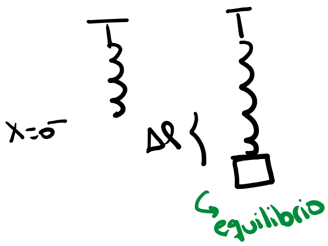
$= k(\Delta l - x)$

4.1.1- Un resorte se estira 5,0 cm cuando se le cuelga una masa de 0,300 kg.

a) ¿Cuál es la constante del resorte?

b) Si la masa se estira 10,0 cm de la posición anterior, ¿cuál es la amplitud y el periodo de oscilación?

c) Suponiendo que cuando el sistema masa-resorte se estira se suelta con velocidad inicial nula, escriba una ecuación del movimiento del sistema del tipo $x(t) = A\ \cos(\omega t + \phi)$.

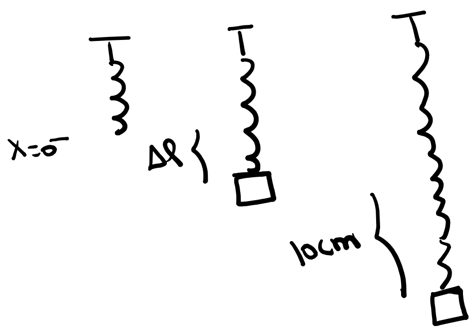


$\Delta l = 5{,}0\,\text{cm}$

$m = 0{,}300\,\text{kg}$

a) $k\Delta l = mg \rightarrow k = \dfrac{mg}{\Delta l} = \dfrac{0{,}300\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2}{0{,}05\,\text{m}} = 59\,\text{N/m}$

b)



$x_0 = 10{,}0\,\text{cm}$

$v_0 = 0$

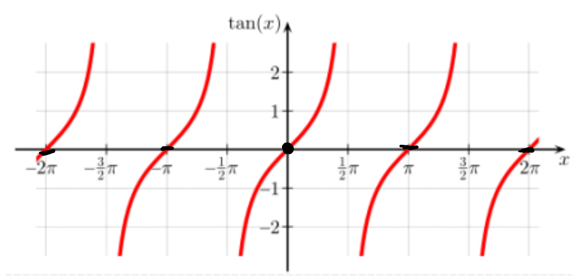
$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = x_0 = 10{,}0\,\text{cm}$

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{59\,\text{N/m}}{0{,}300\,\text{kg}}} = 14\,\text{rad/s} \rightarrow T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{14\,\text{rad/s}} = 0{,}45\,\text{s}$

$\omega = 2\pi f$

$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

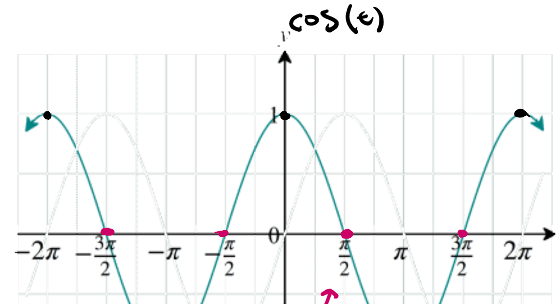
c) $\phi = \tan^{-1}\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$



$\phi = \cos^{-1}\left(\dfrac{x_0}{A}\right) = \cos^{-1}(1) = 0$

$\rightarrow \phi = 0 \rightarrow$ siempre que $v_0 = 0$

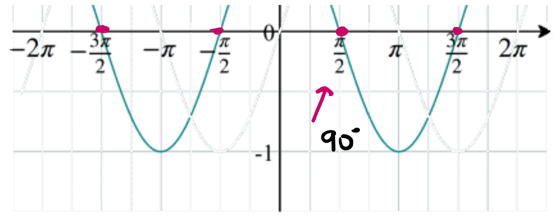
cos(t)



$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

$= 10{,}0\,\text{cm} \cdot \cos\left(14\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\,t\right)$

$$= 10{,}0\,cm \cdot \cos\left(14\,\frac{rad}{s}\,t\right)$$



4.1.2- Utilizando unos órganos sensoriales de sus patas, las arañas pueden detectar vibraciones de sus telas cuando su presa queda prendida de ellas. Al quedar atrapado en una telaraña un insecto de masa 1,00 g hace que la red vibre a 15 Hz.
a) ¿Cuál es la constante elástica de la telaraña?
b) ¿Cuál sería el período de oscilación cuando quedara capturado en la red un insecto de 5,00 g?

telaraña → resorte
insecto → masa

$m = 1{,}00\,g = 1\times10^{-3}\,kg$

$f = 15\,Hz$

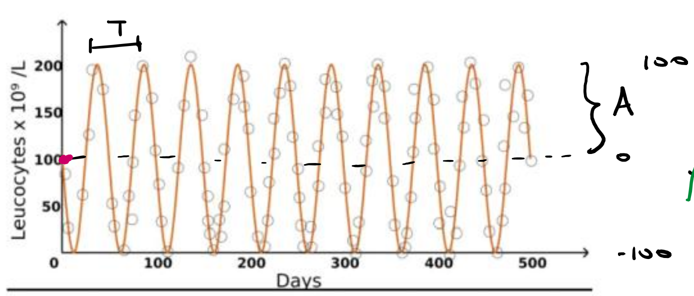
a) $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow K = \omega^2 m$

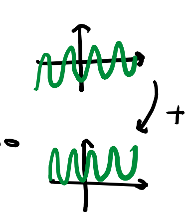
$\omega = 2\pi f = 94\,\frac{rad}{s} \longrightarrow K = \left(94\,\frac{rad}{s}\right)^2 1\times10^{-3}\,kg = 8{,}9\,\frac{N}{m}$

b) Ahora $m' = 5{,}00\,g$ → f cambia, ω también
→ K no cambia $= 8{,}9\,\frac{N}{m}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{m'}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\times10^{-3}\,kg}{8{,}9\,N/m}} = 0{,}15\,s$$

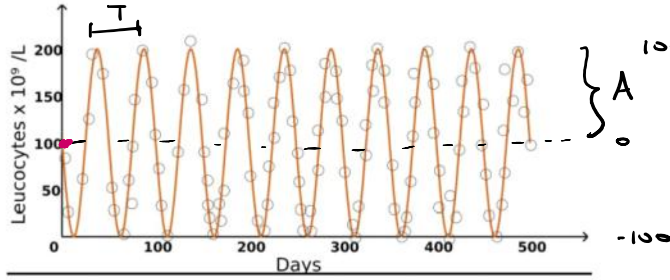
4.1.3- En ciertas enfermedades sanguíneas como la leucemia, el número de células de distinto tipo comienza a oscilar. Actualmente se cree que este comportamiento emerge por la pérdida de estabilidad en los mecanismos de regulación de las células madre pluri-potenciales. Supongamos que tenemos una concentración de leucocitos en sangre como se muestra en la figura.

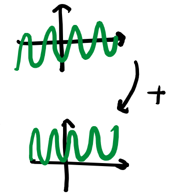




a) ¿Cuánto vale la amplitud de las oscilaciones de la concentración de leucocitos? ¿Cuánto vale el período, su frecuencia y la frecuencia angular?
b) Queremos modelar la dinámica de la concentración de leucocitos como un oscilador armónico. Basándose en el gráfico, escriba la ecuación diferencial que describe la dinámica de la concentración de leucocitos. Escriba la solución a esta ecuación, esto es, la ecuación de la concentración del número de leucocitos como función del tiempo, considerando la

4.1.3- En ciertas enfermedades sanguíneas como la leucemia, el número de células de distinto tipo comienza a oscilar. Actualmente se cree que este comportamiento emerge por la pérdida de estabilidad en los mecanismos de regulación de las células madre pluri-potenciales. Supongamos que tenemos una concentración de leucocitos en sangre como se muestra en la figura.





a) ¿Cuánto vale la amplitud de las oscilaciones de la concentración de leucocitos? ¿Cuánto vale el período, su frecuencia y la frecuencia angular?

b) Queremos modelar la dinámica de la concentración de leucocitos como un oscilador armónico. Basándose en el gráfico, escriba la ecuación diferencial que describe la dinámica de la concentración de leucocitos. Escriba la solución a esta ecuación, esto es, la ecuación de la concentración del número de leucocitos como función del tiempo, considerando la concentración que había en el momento inicial (mostrada en la gráfica).

a) $A = 100 \times 10^9$ leucocitos/L

$T = 50$ días $= 50$ días $\times$ 24 horas $\times$ 60 minutos $\times$ 60 segundos $= 4{,}3 \times 10^6$ s

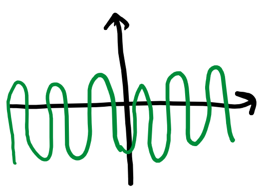
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4{,}3 \times 10^6 \text{ s}} = 2{,}3 \times 10^{-7}$ Hz

$\omega = 2\pi f = 1{,}5 \times 10^{-6}$ rad/s

b) Ecuación de movimiento: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ $\quad x =$ cantidad de $\frac{\text{leucocitos}}{L}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -(1{,}5 \times 10^{-6} \text{ rad/s})\, x}$$

Solución:



$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Calculamos ϕ: $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x_0}{A}\right)$, $x_0 = 0$

$\phi = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x(t) = 100 \times 10^9$ leucocitos/L $\cdot \cos\left(1{,}5 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$

Solución completa: $x(t) = 100 \times 10^9 \frac{\text{leucocitos}}{L} \cos\left(1{,}5 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) + 100 \times 10^9 \frac{\text{leuc}}{L}$

Solución completa: $x(t) = 100 \times 10^{\cdot} \frac{\text{leucocitos}}{L} \cos\left(1{,}5 \times 10 \ \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{2}\right) + 100 \times N \frac{\text{leuc}}{L}$

Oscilaciones amortiguadas: Sistemas reales: no tienen MAS porque hay fuerzas disipativas (por ej. rozamiento con el aire)

→ las oscilaciones se detienen con el tiempo

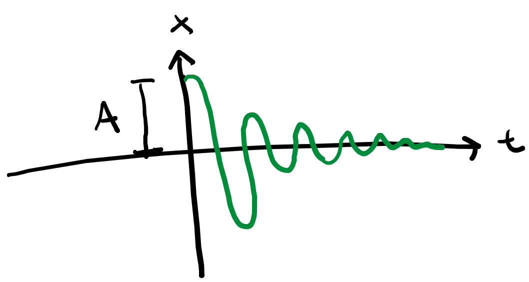
ejemplo masa-resorte: $ma = -kx \underbrace{-bv}_{\text{rozamiento con el aire}}$

• $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, $v = \frac{dx}{dt}$ $\longrightarrow$ $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$

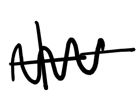
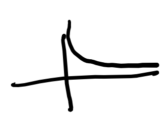
$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x - \underbrace{\frac{b}{m}}_{\gamma \text{ coeficiente de amortiguamiento}} \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \gamma \frac{dx}{dt}}$$ → ecuación para el oscilador armónico amortiguado

• si $b < \sqrt{4km}$ $\longrightarrow$ $\boxed{x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega' t + \phi)}$ $\qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$



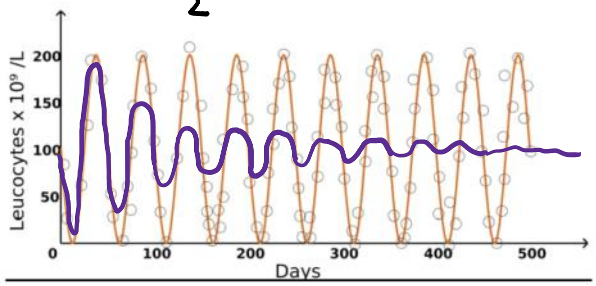
→ Amplitud no constante

cos  $\exp^{-t}$ 

c) Supongamos que el paciente se comienza a recuperar, y por lo tanto las oscilaciones comienzan a reducirse en amplitud. Si observamos experimentalmente que la amplitud de la concentración de leucocitos cae a la mitad en cuatro períodos, y queremos modelar el sistema como un oscilador amortiguado. ¿Cuánto vale el coeficiente de amortiguamiento?

d) Para el caso anterior escriba la ecuación que gobierna la dinámica de la concentración de leucocitos, su solución asumiendo las mismas condiciones iniciales que en la primera parte, y esboce el gráfico de la concentración de leucocitos como función del tiempo para este caso.

c) $A \longrightarrow \frac{A}{2}$ en $t=4T$



$$x(t) = A\cos(\omega' t + \phi)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

en $t=0$: $x(0) = A\cos\phi$

en $t=4T$: $x(4T) = A\cos(\omega' \cdot 4T + \phi)\, e^{-\frac{\gamma}{2}4T}$

$$\rightarrow \cancel{A} e^{-\frac{\gamma}{2}4T} = \frac{\cancel{A}}{2} \longrightarrow e^{-2\gamma T} = \frac{1}{2} \longrightarrow \ln\left(e^{-2\gamma T}\right) = -2\gamma T$$

$$= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \gamma = -\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{2T} = 8{,}0\times10^{-8}\ 1/s$$

d) $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}} = -\omega^2 x - \gamma\frac{dx}{dt} = \boxed{-\left(1{,}5\times10^{-6}\ \frac{rad}{s}\right)x - 8{,}0\times10^{-8}\ \frac{1}{s}\ \frac{dx}{dt}}$

Solución: $x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi) + 100\times10^9$ leuc/L

$$= 100\times10^9\ \frac{\text{leucocitos}}{L}\ e^{-\frac{8\times10^{-8}\frac{1}{s}}{2}t}\cos\left(1{,}5\times10^{-6}\ \frac{rad}{s}t + \frac{\pi}{2}\right) + 100\times10^9\ \frac{\text{leucocitos}}{L}$$