

# Path integrals

Enzo Santana

# Índice:

1. Mecánica cuántica (2)
2. Relatividad especial (7)
3. Deducción de las integrales de camino (11)
4. Ejemplos sencillos en QM (18)
5. Generalización a QFT (22)
6. Ejemplos fuera de QM y QFT (27)
7. Ejemplos de QFT (34)
8. Formalismo de Worldline (56)
9. Bound states y formalismo de Worldline (61)
10. Bibliografía

# 1. Mecánica cuántica

# 1. Mecánica cuántica (QM):

En la QM, las cantidades físicas están representadas por operadores hermíticos. Dada una magnitud física clásica  $A$ , le asignamos un operador hermítico  $\hat{A}$ .

$$A \rightarrow \hat{A}$$

El estado de un sistema físico es representado por un vector (un ket)  $|\psi\rangle$  en un espacio de estados (un espacio de Hilbert)  $\mathcal{H}$ . El espacio dual al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^*$ , cuyos elementos son bras  $\langle\psi|$ , está compuesto por los funcionales lineales que llevan del espacio de estados a los complejos  $\langle\psi| : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$$

# 1. Mecánica cuántica (QM):

Los posibles valores de las mediciones son los autovalores de los observables.

$$\hat{\mathcal{A}}|a\rangle = a|a\rangle$$

Lo que de verdad tiene significado físico en QM es el braket  $\langle\psi|\hat{\mathcal{A}}|\phi\rangle$ , cuya evolución viene dada por la ecuación de Schrödinger,

$$i\partial_t\langle\psi|\hat{\mathcal{A}}|\phi\rangle = \langle\psi|[\hat{H}, \hat{\mathcal{A}}]|\phi\rangle$$

El “problema” surge cuando yo quiero ver la evolución de alguno de estos objetos (bra, ket, operador, ...) por separado.

# 1. Mecánica cuántica (QM):

## 1.1. Pictures en QM:

Como no sabemos cómo evolucionan estos objetos por separados, vamos a suponer que existen unos operadores de evolución y tenemos las relaciones,

$$i\partial_t \hat{A} = [\hat{M}, \hat{A}]$$

$$i\partial_t |\phi\rangle = \hat{N} |\phi\rangle \quad -i\partial_t \langle\psi| = \langle\psi| \hat{N}$$

Se puede demostrar que (obviando hermeticidad) la condición a cumplir es

$$\hat{H} = \hat{N} + \hat{M}$$

# 1. Mecánica cuántica (QM):

## 1.2. Picture de Heisenberg:

En la picture de Heisenberg, la elección es,

$$\hat{N} = 0 \quad \hat{M} = \hat{H}$$

Siendo las ecuaciones de evolución resultantes,

$$i\partial_t|\psi\rangle = 0$$

$$i\partial_t\hat{A} = [\hat{H}, \hat{A}]$$

# 1. Mecánica cuántica (QM):

## 1.3. Picture de Schrödinger:

En la picture de Schrödinger, la elección es,

$$\hat{N} = \hat{H} \quad \hat{M} = 0$$

Siendo las ecuaciones de evolución resultantes,

$$i\partial_t|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$i\partial_t\hat{A} = 0$$



## 2. Relatividad especial

# 1. Relatividad especial (SR):

La relatividad especial (SR) surge de una formulación para la mecánica clásica compatible con el electromagnetismo (EM).

1. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.

2. **Principio de covarianza:** las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de coordenadas inerciales.

Para entender mejor esto, tomemos un ejemplo sencillo del EM.  $A_\mu(x)$

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = A'_\mu(\Lambda x) = A_\mu(x)$$

# 1. Relatividad especial (SR):

¿Que significa cuando decimos que un sistema físico es covariante?

En general, nos referimos a que las expresiones de las leyes físicas no cambian bajo ciertos tipos de transformaciones de coordenadas: estas transformaciones constituyen el grupo de Lorentz  $SO(3, 1) \uparrow$ .

¿Como se define este grupo?

- Dada  $g_{\mu\nu}$  la métrica del espacio-tiempo (ET), una transformación de Lorentz  $\Lambda^\mu{}_\nu$  cumple,

$$\Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho g_{\mu\nu} = g_{\sigma\rho}$$

# 1. Relatividad especial (SR):

Además, en física, en general, nos interesan las transformaciones que se pueden construir a partir de transformaciones infinitesimales.

Para esto hay que pedirle dos requisitos extra a las transformaciones de Lorentz de interés físico.

- Propia:  $\det\{\Lambda\} = 1$
- Ortocrona:  $\Lambda^0_0 \geq 1$

# 1. Relatividad especial (SR):

Un comentario porque va a aparecer más adelante.

- Si yo digo que algo no es explícitamente covariante significa que ese formalismo o teoría trata de forma asimétrica al tiempo y el espacio, lo cual no es compatible con la relatividad especial.

### 3. Deducción de las path integrals

# 3. Deducción de la path integral:

## 3.1 Historia:

- La idea de la path integral surge por primera vez en los 1920s por Wiener en el movimiento Browniano.
- En los 1930s, Dirac sugiere una conexión entre la mecánica cuántica y la acción clásica.
- En 1948, Feynman reintroduce la path integral como una formulación de la QM análoga a las de Heisenberg y Schrödinger.

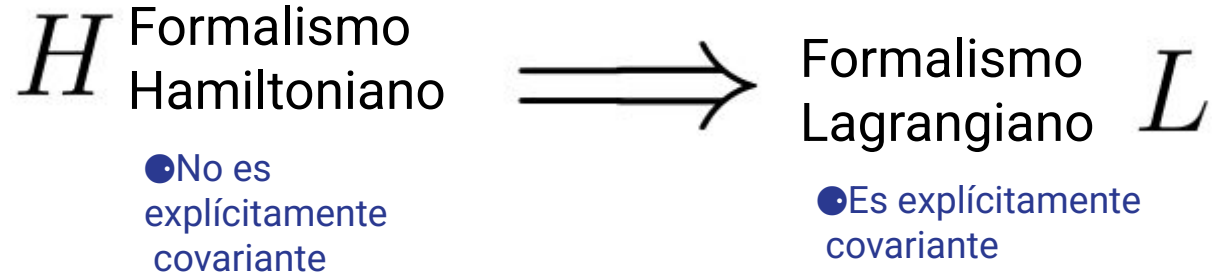
### 3. Deducción de la path integral:

#### 3.2 ¿Cómo cuantizamos un sistema físico?

- La idea principal de la cuantización canónica de un sistema físico consiste en buscar las soluciones clásicas y promover las variables a operadores.
- La cuantización canónica se basa en el formalismo Hamiltoniano de la mecánica clásica.
- Sin embargo, este formalismo tiene un problema cuando buscamos una teoría relativista.



### 3. Deducción de la path integral:



$\Rightarrow$  Esto se logra con las path integrals.

Repasemos rápidamente cómo se construyen.

### 3. Deducción de la path integral:

Lo primero que tenemos que preguntarnos es qué objeto es importante en QM.

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle$$

“Amplitudes de transición” o propagadores

Reescribamos esto de la siguiente forma:

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle$$

# 1. Deducción de la path integral:

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle$$

Pasos para la deducción de la integral de caminos:

1. “Slice” el tiempo, o sea que lo discretizamos en N intervalitos.

$$e^{-i\hat{H}(t'-t)} = e^{-i\hat{H}\epsilon} \dots e^{-i\hat{H}\epsilon}$$

2. Insertamos clausuras entre las exponenciales.

$$\int d_{q_i} |q_i\rangle \langle q_i| = I$$

### 3. Deducción de la path integral:

3. Ahora, nos vamos a centrar en Hamiltonianos del tipo:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$$

4. Utilizando la fórmula de Zassenhaus, podemos escribir:

$$e^{-i\hat{H}\epsilon} = e^{\frac{-i\hat{p}^2\epsilon}{2m}} e^{-iV(\hat{q})\epsilon} e^{o(\epsilon^2)} \simeq e^{\frac{-i\hat{p}^2\epsilon}{2m}} e^{-iV(\hat{q})\epsilon}$$

5. Inserto clausuras en el espacio de momentos entre la primer y segunda exponencial.

$$\int dp_j |p_j\rangle \langle p_j| = I$$

### 3. Deducción de la path integral:

6. Tomamos el límite cuando  $N$  tiende a infinito y (cuentas mediante) obtenemos la path integral.

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle = \int_{x(t)=q}^{x(t')=q'} Dx e^{iS[x]}$$

¿Cómo cambiaría esta expresión si no hubiera restringido el tipo de Hamiltonianos?

## 4. Ejemplos sencillos en QM

## 4. Ejemplos sencillos en QM:

Consideremos el oscilador armónico cuántico.  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2}$

En general, las path integral no tienen solución....

¿Cuál es el truco para calcular integrales de camino?  $\implies$  Saddle point

### 4.1. Saddle point approximation:

→ Se “basa” en el método de Laplace.  
→ Consiste en calcular la integral perturbativamente alrededor de la solución clásica.

- Para el caso del oscilador armónico es exacta porque la acción es cuadrática en la posición.

## 4. Ejemplos sencillos en QM:

Vamos a considerar pequeñas fluctuaciones alrededor de la solución clásica.

$$q = q_c + \delta q$$

La acción toma la forma,

$$S[q] = S[q_c] + S[\delta q]$$

La solución clásica es constante a efectos de la integral de caminos, por lo que podemos escribir:

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle = e^{iS[x_{cl}]} \int_{x(t)=q}^{x(t')=q'} D\delta x e^{iS[\delta x]}$$



## 4. Ejemplos sencillos en QM:

Hallando y resolviendo las integrales de movimiento y reemplazando en la acción, hallamos:

$$S[x_{cl}] = \frac{\omega}{2 \sin \omega(t' - t)} [(q^2 + q'^2) \cos \omega(t' - t) - 2q q']$$

La integral de caminos a resolver es gaussiana, por lo que el problema se resume a hallar el determinante funcional del operador diferencial

$$\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \omega^2$$

OJO! Que esto  
no es nada  
sencillo.

$$\Rightarrow \det\{\Lambda\} = \frac{2}{\omega} \sin \omega(t' - t)$$

## 4. Ejemplos sencillos en QM:

Finalmente, después de muchas cuentas que me saltie, obtenemos el resultado que estamos buscando:

$$\langle q' ; t' | q ; t \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega(t' - t)}} e^{\frac{i\omega}{2 \sin \omega(t' - t)} [(q^2 + q'^2) \cos \omega(t' - t) - 2qq']}$$

## 5. Generalización a QFT

## 5. Generalización a QFT:

**Convención:**  $x = (t, \vec{x})$  4-vector que vive en M

$\vec{x}$  3-vector que vive en el espacio euclídeo

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$$

### 5.1 QFT:

Cuando intentamos describir la física de manera relativista, la QM falla (incluido el intento de RQM), por lo que hay que ir más allá y fijarnos en QFT.

El problema es la asimetría con la que QM trata el espacio y el tiempo:

1. Promover el tiempo a una variable dinámica.
2. Relegar el espacio a una label.

## 5. Generalización a QFT:

Lo que le resultaba más natural a los físicos era lo primero, promover el tiempo a una variable dinámica, así como hace la relatividad.

En la relatividad, las trayectorias dejan de parametrizarse mediante el tiempo y pasan a parametrizarse por nuevos parámetros. En el caso de partículas masivas (nótese que para partículas sin masa, no puede definirse un tiempo propio), lo más común es que las trayectorias vengan parametrizadas por el tiempo propio  $\tau$ .

$$x^\mu(\tau)$$

Sin embargo, pronto se darían cuenta los físicos de la época que este enfoque no tenía futuro.

## 5. Generalización a QFT:

QFT opta por la segunda.  $\hat{x}(t) \rightarrow \hat{\phi}(x)$

Acá vamos a pegar un salto conceptual importante... por mas información dejo al final libros de QFT.

Ahora, el objeto que nos va a interesar calcular por path integral es

$$\langle 0|T\{\phi(x')\phi(x)\}|0\rangle = \frac{1}{Z} \int_{\text{C.B.}} D\phi e^{iS[\phi]} \phi(x')\phi(x)$$

$$Z = \int_{\text{C.B.}} D\phi e^{iS[\phi]}$$

## 5. Generalización a QFT:

### REMARKS:

1. Si las path integrals no tenían solución en QM, en QFT mucho menos... lo cual significa problemas. Especialmente problemáticas son las teorías interactuantes, pero en nuestro universo las cosas interactúan...

¿Entonces, cómo se resuelven estos problemas en la física teórica?

→ Teoría de perturbaciones (Diagramas de Feynman)

→ Métodos numéricos

2. En QFT, no todo es tan lindo como en QM, existen un tipo de partículas que requiere una representación significativamente más complicada que las demás: los fermiones.

## 5. Generalización a QFT:

Para representar a los fermiones, necesitamos las variables de Grassman.

**Def:**  $\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$

$$\bullet \theta_i^2 = 0 \quad \bullet \int d\theta = 0 \quad \bullet \int d\theta \theta = 1$$

• No se puede diferenciar entre la diferenciación y la integración.



## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Primero, vamos a ver un ejemplo que está “fuera” de QM y QFT, una aplicación directa de las integrales de camino a la mecánica estadística (SM). Para ello consideremos un sistema estadístico que para lo que nos interesa puede ser cualquiera, el ejemplo más sencillo es el **gas ideal clásico**.

Nos da información  
sobre la distancia  
media entre las  
partículas.

$$r \gg d$$

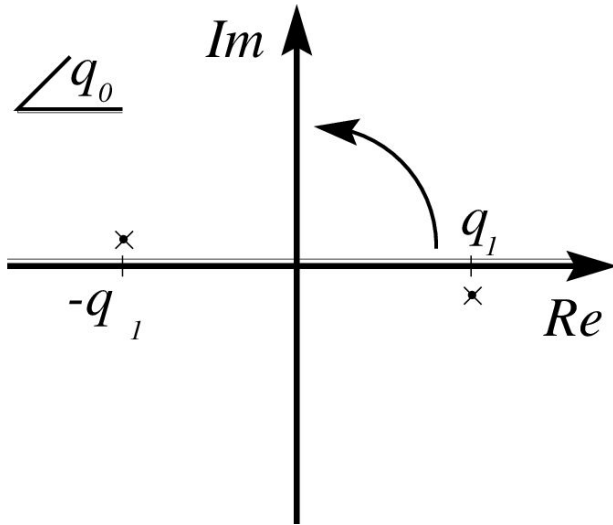
Sin efectos  
cuánticos.

Sin interacciones.

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Antes, necesitamos una “herramienta matemática” que nos va a permitir relacionar la mecánica estadística.

### 6.1. Rotación de Wick:



Una rotación de Wick es una continuación analítica que nos permite mover el tiempo al plano complejo.

$$t \rightarrow -it_E$$

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

¿Qué es lo que hace la rotación de Wick? ¿Porque es útil?

La idea de una rotación de Wick, y la razón del subíndice E en nuestra nueva variable, es pasar del ET de Minkowski al espacio euclídeo cuatridimensional.

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$$

Little  
recall

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Ahora, vamos a pensar en mecánica estadística, en el ensamble canónico y la función de partición.

### 6.2. Función de partición:

$$Z(\beta) = \text{tr}\{e^{-\beta H}\}$$

Recuerden el objeto que nos interesa de QM (propagador) y vamos a darle nombre.

$$\langle q_f | e^{-iHt} | q_i \rangle \equiv K(q_f, t; q_i, 0)$$

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Fijense que si hacemos la rotación de Wick  $t \rightarrow -i\beta$ ,

$$K(q_f, \beta; q_i, 0) = \langle q_f | e^{-\beta H} | q_i \rangle$$

Si ahora tomo el mismo punto final e inicial,

$$K(q, \beta; q, 0) = \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle$$

Si ahora integramos sobre todos los puntos,

$$\int dq K(q, \beta; q, 0) = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle = \text{tr}\{e^{-\beta H}\} = Z(\beta)$$

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Ahora, recuerden que el propagador tiene una expresión como integral de caminos,

$$K(q_f, t; q_i, 0) = \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dq e^{iS[q]}$$

Lo cual inmediatamente implica,

$$K(q, \beta; q, 0) = \int_{q(0)=q}^{q(\beta)=q} Dq e^{-S[q]}$$

Por lo tanto, podemos escribir la función de partición como una path integral.

## 6. Ejemplos “fuera” de QM y QFT:

Por lo tanto, podemos escribir la función de partición como una path integral.

$$Z(\beta) = \int dq \int_{q(0)=q}^{q(\beta)=q} Dq e^{-S[q]}$$

Simplificando, finalmente obtenemos,

$$Z(\beta) = \int_{q(\tau)=q(\tau+\beta)} Dq e^{-S[q]}$$



## 7. Ejemplos en QFT

## Disclaimer de la notación:

Durante toda esta sección de la charla van a ver que aparece

$$\int dz$$

, esta notación no es del todo exacta, pero cuando me di cuenta ya aparecía demasiado y era muy tardado cambiarlas todas. Por lo tanto, les pido que interpreten esta notación de la manera siguiente

$$\int dz \sim \int d^4 z$$

## 7. Ejemplos en QFT:

La idea de esta sección es ver como se hace un cálculo perturbativamente y para ellos, vamos a usar el ejemplo más sencillo.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

La idea es calcular la función de correlación a 2 puntos  $\langle \phi(x) \phi(y) \rangle$ . Vamos a trabajar en el euclídeo (rotación de Wick) para no tener problemas de convergencia. Para hacer el cálculo, primero vamos a introducir el funcional generador (generating functional).

$$Z[J] = \int D\phi e^{-S[\phi] + \int d^4x J(x) \phi(x)}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

La acción euclídea en la exponencial tiene la forma,

$$S[\phi] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi (-\partial^2 + m^2) \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)$$

Definiendo,

$$\Lambda \equiv -\partial^2 + m^2$$

, podemos reescribirla como,

$$S[\phi] = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \phi \Lambda \phi + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Nótese ahora, que la acción se puede separar en la acción de una partícula libre (gaussiana) y un término debido a la interacción.

$$S[\phi] = S_0[\phi] + \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

El generating functional de la teoría libre es,

$$Z_0[J] = \int D\phi e^{-S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)}$$

Como la acción es Gaussiana, se puede mostrar que,

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Como la acción es Gaussiana, se puede mostrar que,

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)}$$

, dónde  $\Delta(x-y)$  cumple,

$$(-\partial^2 + m^2) \Delta(x-y) = \delta(x-y)$$

Podemos pensar el generating functional de la teoría completa como un operador actuando sobre el generating functional libre,

$$Z[J] = e^{-S[\frac{\delta}{\delta J}]} Z_0[J] \quad S\left[\frac{\delta}{\delta J}\right] = \int dz \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4$$

## 7. Ejemplos en QFT:

La función de correlación a 2 puntos, se puede calcular,

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0}$$

La cual claramente no tiene una expresión exacta. Entonces, vamos a hacer un cálculo perturbativo en  $\lambda$  (suponiendo que  $\lambda \ll 1$ ). A primer orden en  $\lambda$ ,

$$Z[J] \simeq \left[ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \left( \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \right] Z_0[J]$$

## 7. Ejemplos en QFT:

La función de correlación a 2 puntos en esta expansión tiene la forma,

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \simeq \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} \left\{ \left[ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \left( \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \right] Z_0[J] \right\} \Big|_{J=0}$$

Ahora, tenemos que calcular estos términos. Empecemos con el más sencillo,

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \Big|_{J=0} = \Delta(x - y)$$



## 7. Ejemplos en QFT:

Ahora, vamos con el orden 1 que no es tan sencillo,

$$N \equiv \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} \int dz \left( \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 Z_0[J] \Big|_{J=0}$$

$$N = \int dz \frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} \left( \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 Z_0[J] \Big|_{J=0}$$

$$N = \int dz \frac{\delta^6}{\delta J(x)\delta J(y)\delta^4 J(z)} Z_0[J] \Big|_{J=0}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

$$N = \int dz \frac{\delta^6}{\delta J(x) \delta J(y) \delta^4 J(z)} Z_0[J] \Big|_{J=0}$$

$$\frac{\delta^6}{\delta J(x) \delta J(y) \delta^4 J(z)} Z_0[J] \Big|_{J=0} = \langle \phi(x) \phi(y) \phi^4(z) \rangle_0$$

$$N = \int dz \langle \phi(x) \phi(y) \phi^4(z) \rangle_0$$

¿Como calculo esto?

RE: Teorema de Wick

## 7. Ejemplos en QFT:

### 7.1. Teorema de Wick:

El teorema de Wick nos dice cómo podemos calcular las funciones de  $n$  puntos a partir de todas las posibles contracciones.

Sin embargo, ya para funciones de 3 o 4 puntos, la cantidad de contracciones se vuelve gigante, por lo que no es muy conveniente.

Por suerte, hay otra forma para calcular esto: [los diagramas de Feynman](#).

## 7. Ejemplos en QFT:

### 7.2. Diagramas de Feynman:

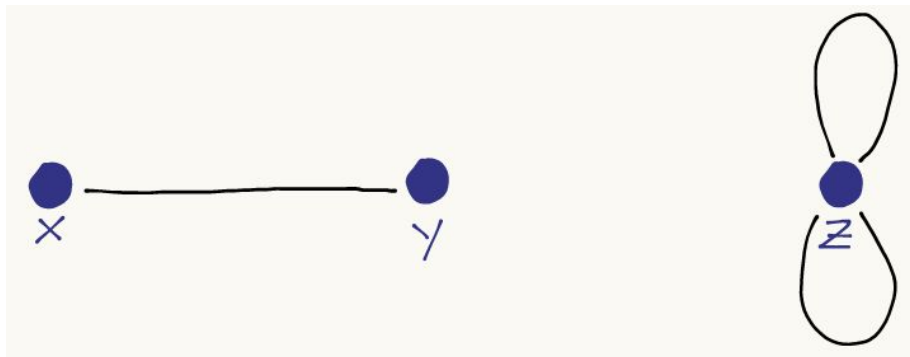
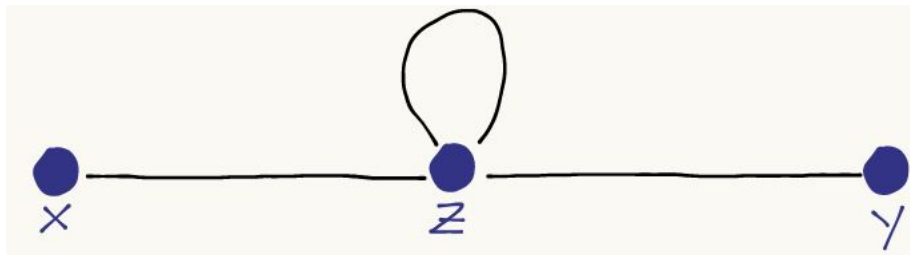
Tenemos 3 puntos en el ET  $(x,y,z)$  y queremos ver de qué formas no equivalentes podemos conectarlos.



Cuidado con que no cualquier forma es válida, sino que se deben respetar ciertas reglas.

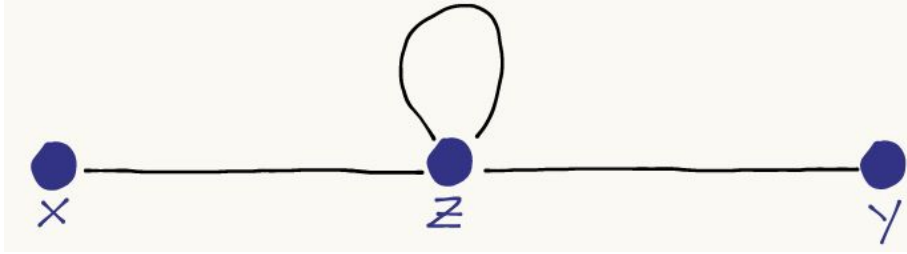
## 7. Ejemplos en QFT:

Pueden convencerse que a primer orden, las únicas dos formas no equivalentes de conectar estos 3 puntos son:



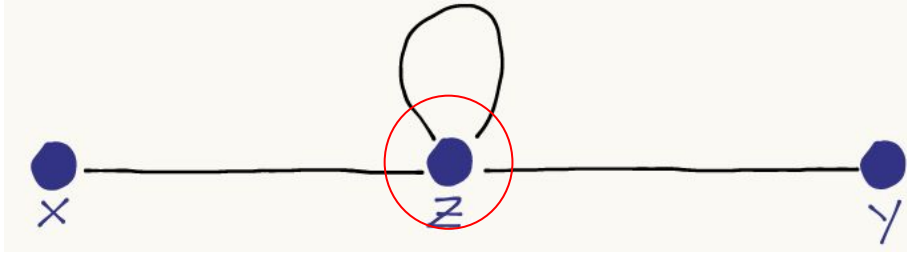
Hay que calcular cuánto aporta cada uno de estos diagramas a la corrección a primer orden.

## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{4!} C \int dz \Delta(x-z) \Delta(y-z) \Delta(0)$$

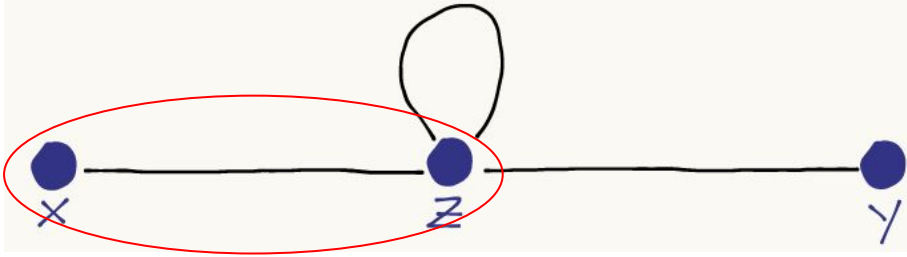
## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{4!} C \int dz \Delta(x-z) \Delta(y-z) \Delta(0)$$

Sin la C

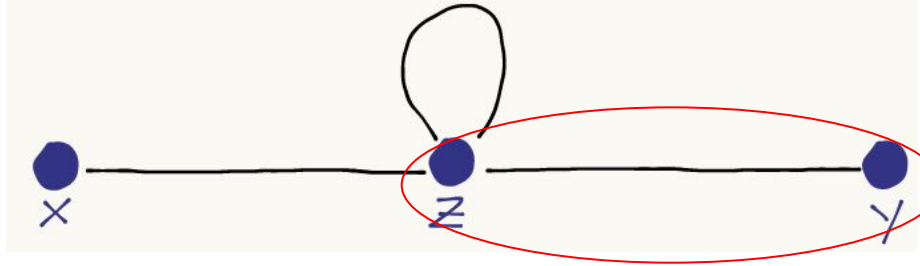
## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{4!} C \int dz \Delta(x-z) \Delta(y-z) \Delta(0)$$



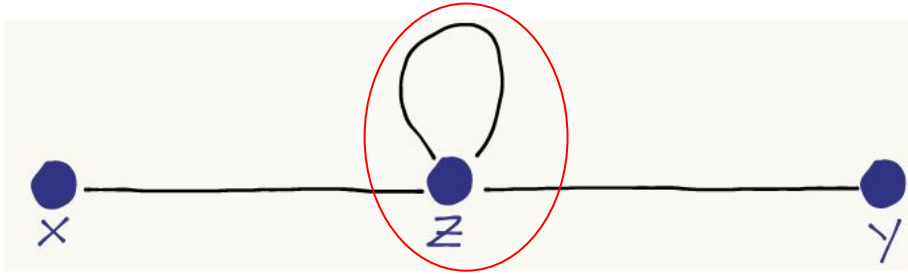
## 7. Ejemplos en QFT:



A Feynman diagram on a light beige background. It consists of a horizontal line with three vertices marked by blue dots. The left vertex is labeled with a blue 'x' below it. The middle vertex is labeled with a blue 'z' below it and has a black tadpole loop attached to its top. The right vertex is labeled with a blue 'y' below it. A red oval is drawn around the entire diagram, including the vertices and the horizontal line segments.

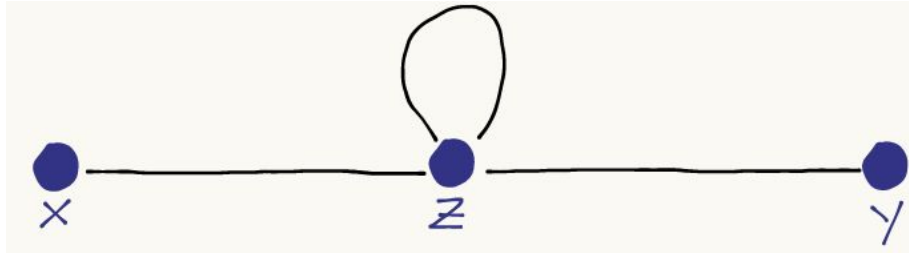
$$= -\frac{\lambda}{4!} C \int dz \Delta(x-z) \Delta(y-z) \Delta(0)$$

## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{4!}C \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0)$$

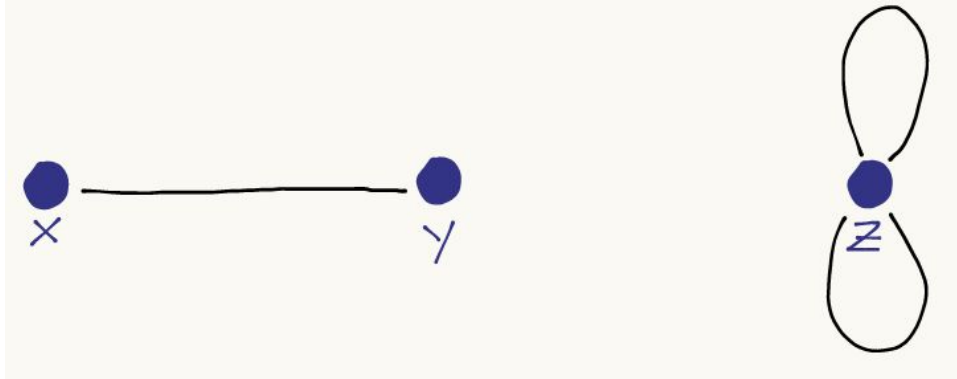
## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{4!} C \int dz \Delta(x-z) \Delta(y-z) \Delta(0)$$

C es el número de diagramas equivalentes a éste que se pueden definir, uno puede convencerse de que este número es 12.

## 7. Ejemplos en QFT:



$$= -\frac{\lambda}{8} \Delta(x - y) \int dz [\Delta(0)]^2$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Por lo tanto, juntando estas contribuciones tenemos,

$$-\frac{\lambda}{4!}N = -\frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) - \frac{\lambda}{8}\Delta(x-y) \int dz [\Delta(0)]^2$$

Por lo que a primer orden, la función de dos puntos tiene la forma,

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \simeq \frac{1}{Z[0]} \left[ \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) - \frac{\lambda}{8}\Delta(x-y) \int dz [\Delta(0)]^2 \right]$$

Veamosla un poco mejor....

## 7. Ejemplos en QFT:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \simeq \frac{1}{Z[0]} \left[ \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int d^4z \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{8} \Delta(x-y) \int d^4z [\Delta(0)]^2 \right]$$

¿Fin de la historia?

## 7. Ejemplos en QFT:

Aún tenemos que calcular del denominador...

$$Z[0] = \int D\phi e^{-S[\phi]}$$

Haciendo el cálculo perturbativo en  $\lambda$  a primer orden,

$$Z[0] \simeq Z_0[0] \left( 1 - \frac{\lambda}{4!} \int dz \langle \phi^4(z) \rangle_0 \right)$$

Nuevamente, calculamos esto utilizando los diagramas de Feynman.

## 7. Ejemplos en QFT:

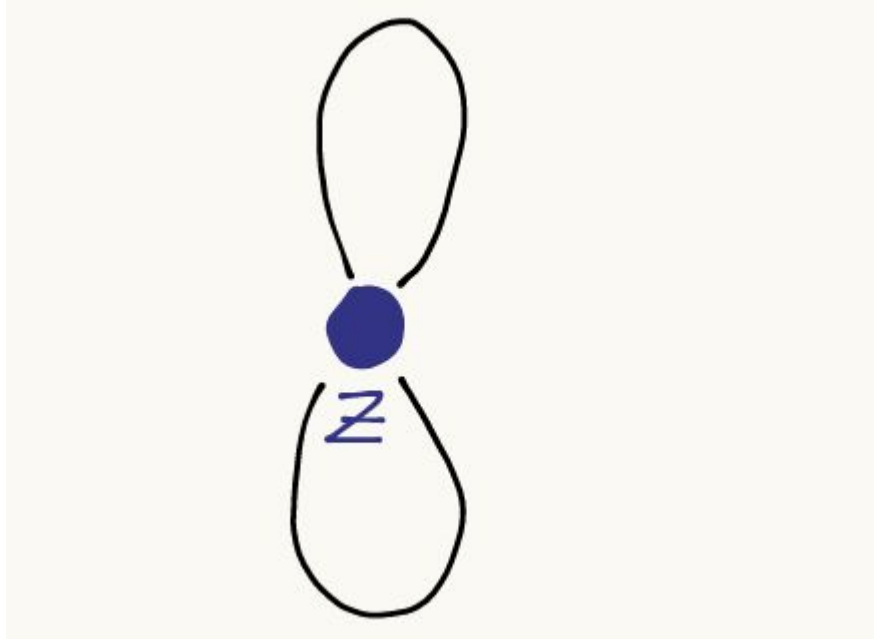
Ahora, tenemos un solo punto ET y queremos ver como conectarlo,





## 7. Ejemplos en QFT:

Se pueden convencer rápidamente que la única forma es,



$$= -\frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Por lo tanto, a primer orden,

$$Z[0] \simeq Z_0[0] \left( 1 - \frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2 \right)$$

Por lo que inmediatamente,

$$\frac{1}{Z[0]} \simeq \frac{1}{Z_0[0]} \left( 1 + \frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2 \right)$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Por lo tanto, a primer orden,

$$Z[0] \simeq Z_0[0] \left( 1 - \frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2 \right)$$

Por lo que inmediatamente,

$$\frac{1}{Z[0]} \simeq \frac{1}{Z_0[0]} \left( 1 + \frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2 \right)$$

Factor numérico que podemos absorber en la normalización de la medida.

## 7. Ejemplos en QFT:

Usando este resultado,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)\phi(y) \rangle \simeq & \left[ \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) \right. \\ & \left. - \frac{\lambda}{8} \Delta(x-y) \int dz [\Delta(0)]^2 \right] \cdot \left[ 1 + \frac{\lambda}{8} \int dz [\Delta(0)]^2 \right] \end{aligned}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Nuevamente, quedándonos solamente a primer orden en  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}\langle \phi(x)\phi(y) \rangle &\simeq \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) - \frac{\lambda}{8}\Delta(x-y) \int dz [\Delta(0)]^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{8}\Delta(x-y) \int dz [\Delta(0)]^2\end{aligned}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Nuevamente, quedándonos solamente a primer orden en  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}\langle \phi(x)\phi(y) \rangle &\simeq \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0) - \frac{\lambda}{8} \cancel{\Delta(x-y)} \int dz [\Delta(0)]^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{8} \cancel{\Delta(x-y)} \int dz [\Delta(0)]^2\end{aligned}$$

## 7. Ejemplos en QFT:

Por lo que finalmente, obtenemos,

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \simeq \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int dz \Delta(x-z)\Delta(y-z)\Delta(0)$$

## 8. Formalismo de worldline



## 8. Formalismo de worldline:

Aunque parezca que nos vamos de tema, consideren un segundo la siguiente integral,

$$\int_0^{\infty} dx e^{i\alpha x}$$

, esta integral no converge si  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pero si dejamos que tome una parte imaginaria infinitesimal,

$$\alpha = \beta + i\epsilon \quad \epsilon \ll 1$$

## 8. Formalismo de worldline:

Entonces, la integral,

$$\int_0^\infty dx e^{i\alpha x} = \int_0^\infty dx e^{i\beta x} e^{-\epsilon x} = \frac{1}{i\alpha} [e^{i\infty} e^{-\infty} - e^0] = -\frac{1}{i\alpha} = \frac{i}{\alpha}$$

$$\int_0^\infty dx e^{i\alpha x} = \frac{i}{\alpha}$$

¿Para que nos sirve este resultado?

## 8. Formalismo de worldline:

### 8.1. Transformada de Fourier en física teórica:

Supongamos que tenemos una función en el espacio de momentos  $f(p)$  y queremos calcularla en el espacio de posición  $f(x - y)$ . Esto se logra mediante la transformada de Fourier,

$$f(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p) e^{ip(x-y)}$$

## 8. Formalismo de worldline:

### 8.2. Parámetro de tiempo propio de Schwinger:

Resulta que el propagador de un campo escalar en el espacio de momento, puede escribirse como,

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

En 1951, Julian Schwinger se dió cuenta de que usando el resultado de la exponencial compleja, podemos reescribir este propagador.

## 8. Formalismo de worldline:

En 1951, Julian Schwinger se dió cuenta de que usando el resultado de la exponencial compleja, podemos reescribir este propagador.

$$\Delta(p) = \int_0^\infty ds e^{is(p^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

## 9. Bounded states y worldline formalism

## 9. Bound states and WL formalism:

Warning: Trabajo en desarrollo actualmente...

Queremos usar el formalismo de worldline para calcular el espectro de dos partículas ligadas sin tener que pasar por Bethe-Salpeter.

## 9. Bound states and WL formalism:

Lo que queremos calcular es la función de 4 puntos,

$$G_4 \equiv \langle \phi_1(x_f) \phi_1(x_i) \phi_2(y_f) \phi_2(y_i) \rangle$$

$$G_4 = \frac{1}{Z} \int DA e^{iS_{MAX}[A]} Z_{mat}[A] \langle \phi_1(x_f) \phi_1(x_i) \rangle_A \langle \phi_2(y_f) \phi_2(y_i) \rangle_A$$



## 9. Bound states and WL formalism:

Nuevamente, nuestro problema se reduce a calcular funciones de 2 puntos, aquí es donde entra el formalismo de worldline,

$$\langle \phi_1(x_f) \phi_1(x_i) \rangle_A = \int_0^\infty ds_1 \int_{x(0)=x_i}^{x(1)=x_f} Dx e^{-is_1 m_1^2 - i \int_0^1 \frac{d\tau}{4s_1} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + ie \int dx^\mu A_\mu(x)}$$

Vamos a cortar por acá porque en este trabajo usamos muchas herramientas más sofisticadas de QFT, pero intentemos dejar una idea de que queremos hacer...

# 10. Bibliografía

## 10. Bibliografía:

- Quantum field theory and the standard model - Schwartz
  - The Quantum Theory of Fields I - Weinberg
  - The Quantum Theory of Fields II - Weinberg
  - Quantum Field Theory and Topology - Schwarz
  - Geometry, topology and physics - Nakahara
  - Quantum Field Theory - Mandl
  - Classical theory of gauge fields - Rudakov
- 