

SEGUNDO PARCIAL

1. Consideramos la ecuación $\dot{x} = X(x)$, donde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un campo localmente Lipschitz. Suponemos que existe una sucesión $\{x_k\} \subset \Omega$ de puntos de equilibrio tal que $x_k \rightarrow \bar{x} \in \Omega$ con $x_k \neq \bar{x}$ para todo k .
 - a) Probar que $\bar{x}$ es un punto de equilibrio.
 - b) ¿Puede ser $\bar{x}$ asintóticamente estable?
 - c) Dar un ejemplo en el que $\bar{x}$ es estable y otro en el que es inestable.
2. Usar funciones de la forma,

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

para decidir la estabilidad en el origen de cada uno de los siguientes sistemas¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 3xy \\ y' = -x^2 - y^3 \end{array} \right. ; \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + xy \\ y' = y - x^2 \end{array} \right.$$

**No se permite usar material.
Justificar todas las respuestas.**

¹No es necesario estudiar la estabilidad asintótica.

Solución

1. a) Tenemos que $X(x_k) = 0$ para todo k . Como el campo X es continuo $X(x_k) \rightarrow X(\bar{x})$. Luego $X(\bar{x}) = 0$, es decir que $\bar{x}$ es punto de equilibrio.
- b) No puede ser asintóticamente estable ya que para todo $\delta > 0$ existe $x_k \in B(\bar{x}, \delta)$ y no se cumple $\phi_t(x_k) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow +\infty$ ya que $\phi_t(x_k) = x_k$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
- c) Si $X \equiv 0$, entonces $\bar{x}$ es claramente estable ya que para todo $\epsilon > 0$ y $x \in B(\bar{x}, \epsilon)$ se tiene $\phi_t(x) \in B(\bar{x}, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$.

Un ejemplo donde x es inestable se obtiene considerando $n = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $X(x) = (0, x_2)$, donde escribimos $x = (x_1, x_2)$. Es decir que la ecuación nos queda

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

Resolviendo cada coordenada por separado tenemos que el flujo local (esta vez es un flujo global porque la ecuación es lineal) queda $\phi_t(x) = (x_1, x_2 e^t)$.

El punto de equilibrio $\bar{x} = 0$ es inestable ya que para todo $\delta > 0$ se tiene $\phi_t(0, \delta/2)$ tiende a ∞ con $t \rightarrow +\infty$. Además $\bar{x}$ es acumulado por puntos de equilibrio de la forma $x_k = (1/k, 0)$.

2. Utilizaremos los teoremas de Lyapunov o Cetaev, para lo que necesitaremos ver que $\dot{V}$ es menor o igual a 0 en un entorno del origen.

Para el primer caso tenemos

$$\dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (2ax, 2by) \cdot (3xy, -x^2 - y^3) = 6ax^2y - 2bx^2y - 2by^4.$$

Si ponemos, por ejemplo, $a = 1$ y $b = 3$, tenemos

$$\dot{V}(x, y) = -6y^4 \leq 0$$

Esta elección implica que V tiene un mínimo en el origen, luego el Teorema de Lyapunov nos asegura la estabilidad del origen.

En el segundo caso

$$\dot{V}(x, y) = \nabla V(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = (2ax, 2by) \cdot (x + xy, y - x^2) = 2ax^2 + 2ax^2y + 2by^2 - 2byx^2.$$

Poniendo $a = b$ nos aseguramos que $V(x, y)$ y $\dot{V}(x, y)$ tengan el signo de $a = b$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Ponemos entonces $a = b = -1$, de esta forma podemos aplicar el Teorema de Cetaev para probar que el origen es inestable, ya que para cualquier sucesión $(x_k, y_k) \rightarrow (0, 0)$ se tiene $V(x_k, y_k) \leq V(0, 0) = 0$ para todo k .