Parcial 2: Astrofísica estelar
3 de noviembre de 2025
Equivalente al 40 % de la nota total

Declaración: Con la entrega de esta evaluación el estudiante certifica que la misma fue resuelta únicamente por su persona y haciendo uso exclusivo de los materiales de apoyo permitidos y oportunamente informados por el docente del curso. Así mismo, el estudiante deja constancia de su conocimiento del "Reglamento que atiende los casos relativos a acciones de plagio u otros actos fraudulentos" de la Resolución N^o 28 del C.D.C. de 11/XII/2018 – Dist. 1128/18 – D.O. 23/I/2019 que en su artículo 3 establece que en caso de demostrarse fehacientemente la existencia de plagio o fraude, el Consejo de Facultad procederá a sancionar al estudiante mediante la suspensión de su calidad de estudiante durante un período no menor a dos meses ni mayor a doce meses y que la sanción mencionada será registrada en la ficha estudiantil correspondiente.

1. A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático muestre que la presión $P(R)$ en la base de la atmósfera de la estrella y la presión central P_c cumplen con la desigualdad:

$$\frac{P(R)}{P_c} < \frac{8\pi R^2}{\kappa M}$$

Explique brevemente sus razonamientos. Sugerencia: recuerde que la ecuación de equilibrio hidrostático puede ser escrita como $dP/d\tau = g/\kappa$ donde κ es la opacidad promedio de la atmósfera, $d\tau$ es la profundidad óptica promedio de la atmósfera y g es la aceleración de la gravedad en r **(10 puntos)**.

Versión del ejercicio 3.3 de Prialnik incluido en el práctico. Como la masa y el espesor de la atmósfera son despreciables frente a la masa y radio de la estrella podemos asumir que g es constante en la atmósfera $g(R) = GM/R^2$. Sustituimos en la ecuación de equilibrio hidrostático e integramos desde ∞ hasta R y obtenemos:

$$\kappa \int_\infty^R dP = \frac{GM}{R^2} \int_\infty^R d\tau$$

La integral del lado derecho es 1 por definición y en el lado izquierdo la presión se anula en $r \to \infty$. Así,

$$\kappa P(R) = g(R) \quad \Longrightarrow \quad P(R) = \frac{GM}{\kappa R^2}$$

De la integral de la ecuación de equilibrio hidrostático en sus formas más usuales, vimos que la presión central P_c tiene una cota mínima dada por:

$$P_c > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

y finalmente obtenemos

$$\frac{P(R)}{P_c} < \frac{8\pi R^2}{\kappa M}$$

2. Considere una enana marrón de masa $M = 0{,}05 M_\odot$ y una enana blanca de masa $M = 0{,}5 M_\odot$. Considere que en ambas estrellas la presión en el interior está dominada por un gas no relativista de electrones degenerados cuya ecuación de estado es $P_{e,deg} = K'(\rho/\mu_e)^{5/3}$. Si la enana marrón tiene una composición química análoga a la del Sol ($\mu_e = 1{,}17$) y la enana blanca está compuestas exclusivamente de He ($\mu_e = 2$):

Respuestas basadas en las relaciones básicas de los polítropos.

(a) ¿Cuánto vale el cociente de los radios de ambas estrellas? **(2 puntos)**

Llamamos R_M al radio de la enana marrón y R_B al radio de la enana blanca. En un polítropo la relación entre la masa y el radio viene dada por:

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G}$$

donde $\gamma = 5/3 = 1 + (1/n) \implies n = 3/2$ y $K = K'/\mu_e^{5/3}$ entonces

$$\frac{\left(\frac{GM_M}{M_n}\right)^{n-1}\left(\frac{R_M}{R_n}\right)^{3-n}}{\left(\frac{GM_B}{M_n}\right)^{n-1}\left(\frac{R_B}{R_n}\right)^{3-n}} = \frac{\frac{[(n+1)K_M]^n}{4\pi G}}{\frac{[(n+1)K_B]^n}{4\pi G}}$$

$$\left(\frac{M_M}{M_B}\right)^{n-1}\left(\frac{R_M}{R_B}\right)^{3-n} = \left(\frac{\mu_B}{\mu_M}\right)^{n\gamma}$$

$$\frac{R_M}{R_B} = \left(\frac{\mu_B}{\mu_M}\right)^{\frac{n\gamma}{3-n}}\left(\frac{M_B}{M_M}\right)^{\frac{n-1}{3-n}} = \left(\frac{\mu_B}{\mu_M}\right)^{5/3}\left(\frac{M_B}{M_M}\right)^{1/3}$$

Así obtenemos:

$$\frac{R_M}{R_B} = 2{,}4438\left(\frac{M_B}{M_M}\right)^{1/3}$$

$$\boxed{\frac{R_M}{R_B} = 5{,}2651}$$

(b) ¿Cuánto vale el cociente de las densidades centrales de ambas estrellas? **(2 puntos)**

$$\frac{\rho_{cM}}{\rho_{cB}} = \frac{D_n\overline{\rho_M}}{D_n\overline{\rho_B}} = \frac{\overline{\rho_M}}{\overline{\rho_B}} = \frac{M_M R_B^3}{M_B R_M^3} = 0{,}0006851$$

$$\boxed{\frac{\rho_{cM}}{\rho_{cB}} = 0{,}0006851}$$

(c) Demuestre que las estructuras de ambas estrellas son homólogas en al menos dos variables **(4 puntos)**

Son polítropos del mismo índice. Para demostrar que son homólogos seguimos el procedimiento visto en clase:

$$\frac{r_M(x)}{r_B(x)} = \frac{R_M}{R_B}$$

$$x = \frac{m_M}{M_M} = \frac{m_B}{M_B}$$

$$dx = \frac{1}{M_M}dm_M = \frac{1}{M_B}dm_B$$

$$dr_M = \frac{1}{4\pi r_M^2\rho_M}dm_M = \frac{1}{4\pi r_M^2\rho_M}M_M dx$$

$$\frac{dr_M}{dx} = \frac{M_M}{4\pi r_M^2\rho_M}$$

$$\frac{dr_B}{dx} = \frac{M_B}{4\pi r_B^2\rho_B}$$

$$\boxed{\frac{\rho_B}{\rho_M} = \frac{R_M^3}{R_B^3}\frac{M_B}{M_M}}$$

$$P = K\rho^\gamma$$

$$\rho = \left(\frac{P}{K}\right)^{1/\gamma}$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_M} = \frac{\left(\frac{P_B}{K_B}\right)^{1/\gamma}}{\left(\frac{P_M}{K_M}\right)^{1/\gamma}} = \frac{R_M^3}{R_B^3}\frac{M_B}{M_M}$$

$$\boxed{\frac{P_B}{P_M} = \frac{K_B}{K_M}\left(\frac{R_M}{R_B}\right)^{3\gamma}\left(\frac{M_B}{M_M}\right)^{\gamma}}$$

(d) ¿Cuál de las estrellas concentra una mayor fracción de su masa en una misma coordenada x? **(2 puntos)**
Vimos que son homólogas. Ambos concentran la masa porcentualmente de la misma manera aunque sus densidades centrales sean diferentes. El mismo n implica una misma distribución de masa.

3. Considere una estrella constituida por un gas ideal en equilibrio térmico e hidrostático, de luminosidad L y cuyo núcleo emite con una luminosidad L_q. Si la estrella sufre una pequeña perturbación $\Delta L = L_q - L$ en la luminosidad de su núcleo tal que $\Delta L < 0$:

(a) Muestre qué efecto tendrá la perturbación sobre el módulo de la energía total de la estrella $|E|$ **(2 puntos)**

$$E = U + U_g + \cancel{K} = -\frac{1}{2}U_g + U_g = \frac{1}{2}U_g \quad con \quad U_g < 0 \implies E < 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \Delta L \implies \frac{dE}{dt} < 0$$

$$E < 0 \quad y \quad \frac{dE}{dt} < 0 \implies |E| \quad aumenta$$

(b) Muestre qué efecto tendrá la perturbación sobre la energía potencial gravitatoria y el radio del núcleo. **(2 puntos)**

$$E = \frac{1}{2}U_g \implies \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dU_g}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dU_g}{dt} < 0$$

$$U_g < 0 \quad y \quad \frac{dU_g}{dt} < 0 \implies |U_g| \quad aumenta \quad \implies r \quad disminuye\ y\ el\ nucleo\ se\ comprime.$$

(c) ¿Qué produce esta perturbación en la temperatura promedio de la estrella? **(2 puntos)**
La capacidad calorífica negativa se escribe como:

$$\frac{dE}{dt} \propto -\frac{d\overline{T}}{dt}$$

vimos que

$$\frac{dE}{dt} < 0 \implies \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dU}{dt} < 0 \implies \frac{dU}{dt} > 0$$

como $U \propto \overline{T}$,

$$\frac{d\overline{T}}{dt} > 0 \quad y\ la\ temperatura\ promedio\ aumenta$$

(d) Muestre por qué y cómo la estrella retornará al equilibrio térmico. **(4 puntos)**
Si el radio del núcleo decrece, aumentará ρ y T lo cual aumentará q, y esto a su vez aumentará L_q. Así el sistema evoluciona hacia $\Delta L \to 0$.

4. Demuestre que el inicio de un proceso de fusión en un nucleo soportado por presión de electrones degenerados produce un desequilibrio termonuclear desbocado (*runaway* termonuclear). **(10 puntos)**

El proceso es como sigue:

(a) Para un gas degenerado $P = K\rho^{\gamma}$ y P no depende de T.

(b) La energía interna por unidad de masa es $u_{gas} = \frac{3}{2}\frac{P}{\rho} = \frac{3}{2}K\rho^{\gamma-1}$ y no depende de T

(c) El teorema del virial sigue siendo válido. $U_g = -2U_{gas} \Rightarrow U_{gas} = -\frac{U_g}{2}$

(d) El inicio de la fusión en el núcleo hace que $q > 0$ y L_q aumente por lo que $\Delta L = L_q - L$ con $\Delta L > 0$

(e) Como en el caso de la inestabilidad térmica secular: $\frac{dE}{dt} = \Delta L > 0 \quad como \quad E < 0 \Rightarrow |E|$ disminuye

(f) Si $|E|$ disminuye entonces U_g disminuye también, es decir, se expande.

(g) Como el gas está degenerado la expansión no produce un cambio en T porque u_{gas} no depende de T

(h) La expansión sólo produce una disminución de la densidad.

(i) Como q depende más fuertemente de T que de ρ, la fusión no se detiene y L_q aumenta.

(j) El aumento de L_q eleva a T que, a su vez, eleva q ($q = q_o\, T^a \rho^b$) y se produce el runaway termonuclear en el que q crece rápidamente hasta que ρ disminuya lo suficiente.