DINAMICA ORBITAL

Segundo Parcial, 28 de noviembre 2025

Se valora claridad del planteo del problema, claridad en planteo de hipótesis y de razonamiento, planteamiento matemático correcto, realización correcta de operaciones matemáticas, realización correcta de cálculos numéricos, interpretación correcta de los resultados.

1. (14 puntos) La nave interestelar 3I/ATLAS venía con órbita heliocéntrica con $v_\infty = 58$ km/seg y tuvo una distancia de perihelio $q = 1.36$ ua. Sin embargo, al llegar al perihelio se activaron los motores impulsando a la nave en la dirección de su velocidad adquiriendo un valor de $v = 76$ km/seg. Calcular el cociente entre el combustible consumido Δm y su masa original M necesarios para lograr esa velocidad sabiendo que la velocidad de eyección de los gases del cohete es $v_e = 3$ km/seg.

2. (15 puntos) En el sistema Tierra-Luna (órbita circular, distancia mutua 384.000 km) calcular los períodos de las pequeñas oscilaciones dentro del plano (x,y) en torno a los puntos L_4 y L_5, expresados en días. Una partícula que pase por el punto L_4 con $v \neq 0$ podría impactar en la Luna? Justifique su respuesta. El periodo orbital de la Luna es 27.32 días.

3. (9 puntos) Escriba la ecuación diferencial para el movimiento heliocéntrico de Urano perturbado solamente por Júpiter. Indique cuál es el término directo y cuál el indirecto de la perturbación. Suponiendo ambos en órbitas circulares con $a_J = 5.2$ y $a_U = 19.2$ ua evalúe valores máximos y mínimos de cada término.

4. (12 puntos) Un asteroide en órbita heliocéntrica de semieje a y excentricidad e sufre una pequeña aceleración perturbadora transversa $T = Br^{-2}$, siendo B una constante y r su distancia heliocéntrica. Calcular el Δa que sufre el asteroide al cabo de un período orbital. Tener presente que la variación instantánea está dada por:

$$da/dt = 2a^{3/2}[\mu(1-e^2)]^{-1/2}T(1+e\cos f)$$

Datos:

$k = 0.01720209895$
$G = 6.67384 \times 10^{-11}$ MKS
$M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
$M_\oplus = 5.972 \times 10^{24}$ kg
$M_L = M_\oplus/81$
1 ua $= 149.6 \times 10^6$ km
1 dia $= 24 \times 60 \times 60$ seg

resolucion segun gemini

Resolución del Segundo Parcial de Dinámica Orbital

Departamento de Astronomía (IFFC) 2025

28 de noviembre de 2025

1 Problema 1: Impulso en el Perihelio

El objetivo es calcular el cociente $\Delta m/M$ (combustible consumido / masa original) tras un impulso en el perihelio.

1.1. Velocidad en el Perihelio (antes del impulso)

La velocidad v_p en el perihelio q para una órbita hiperbólica está dada por la conservación de la energía:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{\mu}{q} = \frac{v_\infty^2}{2}$$

donde $\mu = GM_\odot$ es el parámetro gravitacional del Sol.

$$v_p^2 = v_\infty^2 + \frac{2\mu}{q}$$

Datos:

- $v_\infty = 58 \times 10^3$ m/s [cite: 6]
- $q = 1.36$ ua $\approx 2.03456 \times 10^{11}$ m [cite: 6, 23]
- $\mu = GM_\odot \approx (6.67384 \times 10^{-11}) \times (2 \times 10^{30}) \approx 1.334768 \times 10^{20}$ m^3/s^2 [cite: 19, 20]

Cálculo de v_p:

$$v_p^2 = (58 \times 10^3)^2 + \frac{2 \times (1.334768 \times 10^{20})}{2.03456 \times 10^{11}}$$

$$v_p^2 \approx 3.364 \times 10^9 + 1.31016 \times 10^9 = 4.67416 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_p \approx 68.3678 \text{ km/seg}$$

1.2. Cambio de Velocidad (Δv)

El impulso se aplica en la dirección de la velocidad, adquiriendo $v_{final} = 76$ km/seg[cite: 7].

$$\Delta v = v_{final} - v_p = 76 \text{ km/seg} - 68.3678 \text{ km/seg} = 7.6322 \text{ km/seg}$$

1.3. Cociente de Masas

Usamos la Ecuación de Tsiolkovsky:

$$\Delta v = v_e \ln\left(\frac{M_{inicial}}{M_{final}}\right) = -v_e \ln\left(1 - \frac{\Delta m}{M}\right)$$

Donde $v_e = 3$ km/seg[cite: 7].

$$\frac{\Delta v}{v_e} = \frac{7.6322}{3} \approx 2.54407$$

$$\frac{M}{M - \Delta m} = e^{2.54407} \approx 12.7303$$

Despejando el cociente $\Delta m/M$:

$$1 - \frac{\Delta m}{M} = \frac{1}{12.7303} \approx 0.07855$$

$$\frac{\Delta m}{M} = 1 - 0.07855 \approx 0.92145$$

$$\Delta m/M \approx 0.921$$

2 Problema 2: Puntos de Lagrange L_4 y L_5

2.1. Razón de Masas (μ)

Calculamos la razón de masas del sistema Tierra ($M_\oplus$) - Luna (M_L):

$$M_\oplus \approx 5.972 \times 10^{24} \text{ kg} \quad M_L = M_\oplus/81$$

[cite: 21, 22]

$$\mu = \frac{M_L}{M_\oplus + M_L} = \frac{M_\oplus/81}{M_\oplus(1 + 1/81)} = \frac{1/81}{82/81} = \frac{1}{82} \approx 0.012195$$

2.2. Períodos de las Pequeñas Oscilaciones

Las frecuencias angulares cuadradas (λ^2) de las pequeñas oscilaciones en el plano en torno a L_4 y L_5 (en unidades de la frecuencia orbital ω) son:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}\right]$$

Cálculo del discriminante:

$$\sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)} = \sqrt{1 - 27\left(\frac{1}{82}\right)\left(\frac{81}{82}\right)} \approx \sqrt{0.67475} \approx 0.82143$$

Las frecuencias son:

- Frecuencia Larga (signo $-$): $\lambda_L^2 \approx \frac{1}{2}(1 - 0.82143) \approx 0.089285 \implies \lambda_L \approx 0.2988$
- Frecuencia Corta (signo $+$): $\lambda_C^2 \approx \frac{1}{2}(1 + 0.82143) \approx 0.910715 \implies \lambda_C \approx 0.9543$

El período de oscilación P se relaciona con el período orbital $P_{orb} = 27.32$ días [cite: 10] por $P = P_{orb}/\lambda$.

- Período Largo (P_L): $P_L \approx \frac{27.32}{0.2988} \approx 91.43$ días
- Período Corto (P_C): $P_C \approx \frac{27.32}{0.9543} \approx 28.63$ días

2.3. Posibilidad de Impacto en la Luna

No[cite: 9]. En el Sistema Restringido de Tres Cuerpos Circular, los puntos L_4 y L_5 están rodeados por barreras de potencial (definidas por la energía de Jacobi en L_1 y L_2) que separan sus regiones de movimiento de las regiones cercanas a los cuerpos primarios ($M_\oplus$ y M_L). La Luna se encuentra dentro de su **esfera de Hill**. Una partícula en L_4 debe tener una energía de Jacobi suficientemente alta para cruzar el punto de paso L_2 (o L_1) y así entrar en la región de la Luna. Una $v \neq 0$ pequeña en L_4 solo resultará en las **oscilaciones estables** (libración) calculadas anteriormente, manteniendo la partícula confinada cerca de L_4.

3 Problema 3: Urano Perturbado por Júpiter

3.1. Ecuación Diferencial del Movimiento Perturbado

La ecuación diferencial del movimiento de Urano ($\mathbf{r}_U$) alrededor del Sol perturbado por Júpiter (m_J) es:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_U}{dt^2} + \frac{\mu_\odot}{r_U^3}\mathbf{r}_U = \mathbf{F}_{pert}$$

donde $\mathbf{F}_{pert}$ es la fuerza perturbadora por unidad de masa:

$$\mathbf{F}_{pert} = Gm_J\left[\frac{\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_U|^3} - \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3}\right]$$

3.2. Términos de la Perturbación

- **Término Directo:** Es la fuerza de atracción de Júpiter sobre Urano.

$$\mathbf{F}_{dir} = Gm_J \frac{\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_U|^3}$$

- **Término Indirecto:** Es la corrección por la aceleración del Sol (cuerpo central) debida a Júpiter, con respecto al centro de masa del sistema.

$$\mathbf{F}_{ind} = -Gm_J \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3}$$

3.3. Evaluación de Valores Máximos y Mínimos

Suponemos órbitas circulares: $r_J = a_J = 5.2$ ua, $r_U = a_U = 19.2$ ua[cite: 13].

- **Término Indirecto ($\mathbf{F}_{ind}$):** La magnitud es constante ya que $r_J = a_J$.

$$|\mathbf{F}_{ind}| = Gm_J \frac{1}{a_J^2} = Gm_J \frac{1}{(5.2)^2} \approx \mathbf{0.03704} \cdot Gm_J/\text{ua}^2$$

  (Máximo = Mínimo)

- **Término Directo ($\mathbf{F}_{dir}$):** La magnitud depende de la distancia $\Delta = |\mathbf{r}_J - \mathbf{r}_U|$.
  - Mínimo (Oposición, $\Delta_{max} = a_U + a_J = 24.4$ ua):

$$|\mathbf{F}_{dir}|_{min} = Gm_J \frac{1}{\Delta_{max}^2} = Gm_J \frac{1}{(24.4)^2} \approx \mathbf{0.00168} \cdot Gm_J/\text{ua}^2$$

  - Máximo (Conjunción, $\Delta_{min} = a_U - a_J = 14.0$ ua):

$$|\mathbf{F}_{dir}|_{max} = Gm_J \frac{1}{\Delta_{min}^2} = Gm_J \frac{1}{(14.0)^2} \approx \mathbf{0.00510} \cdot Gm_J/\text{ua}^2$$

4 Problema 4: Variación del Semieje Mayor Δa

Se pide calcular Δa en un período orbital (P) para una perturbación transversal $T = Br^{-2}$[cite: 14].

4.1. Ecuación de Variación y Cambio de Variable

La variación instantánea está dada por[cite: 16, 25]:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{3/2}}{[\mu(1 - e^2)]^{1/2}} T(1 + e\cos f)$$

El cambio total Δa es $\int_0^P \frac{da}{dt} dt$. Usamos $dt = \frac{r^2}{h} df$ con $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$.

$$\Delta a = \int_0^{2\pi} \frac{da}{dt} \frac{r^2}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} df$$

Sustituyendo $\frac{da}{dt}$ y simplificando:

$$\Delta a = \frac{2a^{1/2}}{\mu(1-e^2)} \int_0^{2\pi} r^2 T(1 + e\cos f) df$$

4.2. Sustitución e Integración

Sustituimos la perturbación $T = Br^{-2}$[cite: 14]:

$$\Delta a = \frac{2a^{1/2}}{\mu(1-e^2)} \int_0^{2\pi} r^2 \left(\frac{B}{r^2}\right)(1 + e\cos f) df$$

$$\Delta a = \frac{2Ba^{1/2}}{\mu(1-e^2)} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos f) df$$

Evaluando la integral:

$$\int_0^{2\pi} (1 + e\cos f) df = [f + e\sin f]_0^{2\pi} = (2\pi + e\sin(2\pi)) - (0 + e\sin(0)) = 2\pi$$

4.3. Resultado Final

Sustituyendo el valor de la integral:

$$\Delta a = \frac{2Ba^{1/2}}{\mu(1-e^2)}(2\pi)$$

$$\Delta a = \frac{4\pi Ba^{1/2}}{\mu(1-e^2)}$$

2do parcial 2025 dinamica orbital

1) 3I/atlas

In [3]:
```
from math import *
kgau=0.01720209895
vinf=58000
veye=3000
G=6.673e-11
msol=2e30
qatlas=1.36*149.6e9
vq2=2*G*msol/qatlas+vinf**2
vq=sqrt(vq2)
print("Vq=",vq)
```

```
Vq= 68380.77107019754
```

In [4]:
```
Dv=76000-vq
print("Dv=", Dv)
DmsobreM=1-exp(-Dv/veye)
print("Dm/M=", DmsobreM)
```

```
Dv= 7619.228929802455
Dm/M= 0.9211133270939488
```

2) Libraciones en sistema tierra-luna

In [6]:
```
m=1/82
periodorbital=27.32
raiz=sqrt(1-27*m*(1-m))
beta1=(-1+raiz)/2
beta2=(-1-raiz)/2
lambda1=sqrt(-beta1)
lambda2=sqrt(-beta2)
p1=periodorbital/lambda1
p2=periodorbital/lambda2

print("periodo 1 = ",p1, "dias")
print("periodo 2 = ",p2, "dias")
```

```
periodo 1 =  91.43056242119668 dias
periodo 2 =  28.62789761132529 dias
```

3) Urano perturbado por Jupiter

In [2]:
```
aj=5.2
au=19.2
indirecto=1/aj**2
diremax=1/(au-aj)**2
diremin=1/(au+aj)**2
print("directo maximo = ",diremax)
print("directo minimo = ",diremin)
print("indirecto = ",indirecto)
```

```
directo maximo =  0.00510204081632653
directo minimo =  0.0016796560064498793
indirecto =  0.036982248520710054
```

In [ ]: