

Parcial 2

2hs de tiempo con acceso a material de clase.

1. Oscilador armónico perturbado.

Considere una partícula de masa m que se mueve en una dimensión, cuyo Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \lambda x, \quad (1)$$

donde ω y λ son parámetros reales. Considerando este sistema como una perturbación de un oscilador armónico ideal (λ pequeño):

- Obtenga las correcciones de la energía a primer orden.
- Obtenga las correcciones de la energía a segundo orden. ¿Cuán pequeño debe ser λ para garantizar el éxito del desarrollo perturbativo?
- Observe que H puede ser llevado a la forma de un oscilador armónico simple, pero desplazado, mediante el cambio de variable $x' = x + \frac{\lambda}{m\omega^2}$ y $p' = p$. Obtenga la forma exacta del espectro de H y compare con el resultado del desarrollo perturbativo anterior.

Recuerde que, en la representación de operadores creación y aniquilación, $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$ y que, en la base de autoestados $|n\rangle$ del Hamiltoniano sin perturbar, $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ y $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

2. Átomo de Hidrógeno.

Considere la base estandar de autoestados ligados del Hamiltoniano del átomo de Hidrógeno $|n, l, m\rangle$. Para los estados

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |3, 2, -1\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= |4, 1, 1\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, 0\rangle + |2, 1, 1\rangle) \end{aligned}$$

- Obtenga el valor esperado de H, L^2 y L_z en los tres casos.
- Obtenga la desviación ΔH , $\Delta(L^2)$ y ΔL_z en los tres casos.
- Obtenga la expresión explícita para $|\psi(t)\rangle$ asumiendo cada uno de los estados anteriores como estado inicial.

Rúbrica para calificación de parcial: será **Muy Insuficiente** un trabajo que no logre cubrir ninguno de los ejercicios o lo haga con errores conceptuales graves en ambos. Será **Insuficiente** un trabajo que logre cubrir ambos ejercicios con algunos errores conceptuales o con errores de cálculo importantes. También será **Insuficiente** un trabajo que logre cubrir sólo uno de los ejercicios sin errores conceptuales graves o de cálculo importantes. Será **Aceptable** un trabajo que logre completar ambos ejercicios con errores de cálculo o conceptuales menores. Será **Bueno** un trabajo que logre completar un ejercicio sin errores conceptuales o de cálculo y el otro con errores conceptuales o de cálculo menores. Será muy bueno un trabajo que logre completar ambos ejercicios sin errores conceptuales y con algunos errores de cálculo. Será **Excelente** un trabajo que logre cubrir ambos ejercicios sin errores (o con errores de cálculo muy menores).

Solución:

1. Oscilador armónico perturbado

a) La perturbación de las energías a primer orden se calcula como

$$E_n^1 = \langle n | \lambda x | n \rangle = \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | a + a^\dagger | n \rangle = \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \langle n | n-1 \rangle + \sqrt{n+1} \langle n | n+1 \rangle) = 0 \quad (2)$$

También es posible justificarlo diciendo que, en la representación x , el propio x es una función impar y que los autoestados de H tienen paridad definida, por tanto el valor esperado de x en estos estados debe ser cero.

b) Usando la fórmula (ya que el espectro del Hamiltoniano sin perturbar es no-degenerado)

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \lambda x | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}.$$

y el resultado similar al punto anterior

$$\langle m | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}),$$

se obtiene

$$E_n^{(2)} = \frac{\hbar \lambda^2}{2m\omega} \sum_{m \neq n} \frac{|\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}|^2}{\hbar\omega(n-m)} = \frac{\lambda^2}{2m\omega^2} \left(\frac{n+1}{-1} + \frac{n}{1} \right) = -\frac{\lambda^2}{2m\omega^2}.$$

Esta corrección es independiente de n .

c) Haciendo el cambio de variable sugerido $H(x', p') = \frac{(p')^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x')^2 - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$ y por tanto es espectro de energías es $E_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \frac{\lambda^2}{2m\omega^2}$ y esto coincide con la energía corregida a segundo orden en el desarrollo perturbativo. Esto no prueba que la serie del desarrollo se corte a orden 2, porque no sabemos si los autoestados corregidos son también exactos.

2. Átomo de Hidrógeno

a) En el caso de H , los tres estados son autoestados y por tanto los valores esperados son respectivamente $H_1 = -E_I/3^2$, $H_2 = -E_I/4^2$ y $H_3 = -E_I/2^2$. En el caso de L^2 también se cumple que los tres son autoestados y por tanto $L_1^2 = 6\hbar^2$, $L_2^2 = 2\hbar^2$ y $L_3^2 = 2\hbar^2$. En el caso de L_z , los dos primeros son autoestados y por tanto $L_{1z} = -\hbar$ y $L_{2z} = \hbar$. Mientras que $L_{3z} = \frac{1}{2}(0 + \hbar) = \frac{\hbar}{2}$

b) Las desviaciones son cero para los tres observables en los primeros dos estados porque son autoestados de los tres. En el caso de ψ_3 , este es autoestados de H y de L^2 , por lo cual estos observables no tienen desviación. En cambio $(\Delta L_{3z})^2 = \langle \psi_3 | L_z^2 | \psi_3 \rangle - (\langle \psi_3 | L_z | \psi_3 \rangle)^2 = \frac{1}{2}(0 + \hbar^2) - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2$. Por lo tanto $\Delta L_{3z} = \frac{\hbar}{2}$.

c) Los tres estados son autoestados de H y por lo tanto no evolucionan en el tiempo ($|\psi(t)\rangle = |\psi_i\rangle$ para $i = 1, 2, 3$)