

EXAMEN DICIEMBRE 2025 - PRÁCTICO

1. Consideramos en la recta la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$, donde

$$f(x, t) = \frac{1}{t^2 + x}.$$

- a) Determinar el máximo dominio abierto Ω en donde puede estar definida f y verificar que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las hipótesis del teorema de Picard.
- b) Observar que toda solución φ con $\varphi(0) > 0$ cumple $\varphi(t) > \varphi(0)$ para todo $t > 0$ que esté en el dominio de φ .
- c) Probar que una solución maximal como arriba debe estar definida para todo $t > 0$.

2. Se considera la ecuación $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontrar una expresión explícita para la solución que cumple la condición inicial $x(1) = (1, 1)$.

3. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = 2x^3 - 2xy \end{cases}$$

- a) Halle los puntos de equilibrio.
- b) Hallar una preintegral de la forma $H(x, y) = y - x^n$.
- c) Usando el paso anterior dibuje el diagrama de fase.
- d) Estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio.

**No se permite usar material.
Justificar todas las respuestas.**

Solución

1. a) $f(t, x)$ está definido si $t^2 + x \neq 0$, es decir que Ω es el plano $\mathbb{R}^2$ sin la parábola determinada por la ecuación $x = -t^2$.

Como f es de clase C^∞ en Ω , esta función satisface las hipótesis de Picard en este dominio.

- b) Supongamos que $\varphi(0) = x_0 > 0$. Esto implica que φ es creciente en $t = 0$ y por lo tanto existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ para todo $t \in (0, \epsilon)$. Observar que f es estrictamente positiva en el semi-plano $S = \{(t, x) : x \geq x_0\}$.

Si existe $t > 0$ tal que $\varphi(t) \leq \varphi(0)$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t_0) = \varphi(0)$ de forma que el gráfico de $\varphi|_{[0, t_0]}$ está en el semiplano S . Luego existe $t_1 \in [0, t_0]$ con $f(t_1, \varphi(t_1)) = \varphi'(t_1) = 0$. Esto es absurdo porque $(t_1, \varphi(t_1)) \in S$.

- c) Consideramos para cada $T > 0$ el compacto

$$K_T = [0, T] \times [T/\varphi(0) + \varphi(0)].$$

Como $\varphi'(t) \in [0, 1/\varphi(0)]$ para todo $t > 0$ el el dominio de φ , el punto $(t, \varphi(t))$ debe pertenecer a K_T para todo $t \in [0, T]$. Esto implica que si el intervalo de definición de φ es acotado superiormente, su gráfico a futuro queda dentro de un compacto K_T , lo que contradice el Teorema de Escape de Compactos.

2. Sabemos que la solución debe ser de la forma

$$\varphi(t) = e^{(t-1)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la exponencial de la matriz $(t-1)A$ buscamos la forma de Jordan de A . Su polinomio característico es $\chi_A(t) = (1-t)(-2-t)$, por lo que sus valores propios son 1 y -2 y por lo tanto su forma de Jordan es diagonal.

Una base de vectores propios de A es $\{(1, 0), (1, 1)\}$. Si consideramos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{(t-1)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P e^{(t-1)D} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(t-1)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2(t-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. a) Los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ 2x^3 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Como $2x^3 - 2xy = 2x(x^2 - y)$, tenemos que ambas ecuaciones se satisfacen en la parábola $y = x^2$.

b) Para que H sea una preintegral se debe anular

$$\begin{aligned}\nabla H(x, y) \cdot (x^2 - y, 2x_3 - 2xy) &= (x^2 - y) \left((-nx^{n-1}, 1) \cdot (1, 2x) \right) \\ &= (x^2 - y)(2x - nx^{n-1}).\end{aligned}$$

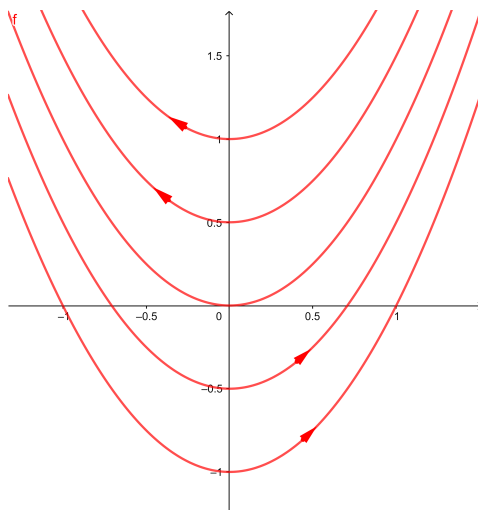
Observamos que este producto se anula para todo $x, y \in \mathbb{R}$ si y solo si $n = 2$, luego $H(x, y) = y - x^2$.

c) Sabemos que las órbitas están contenidas en las curvas de nivel de H , es decir, en las parábolas determinadas por las ecuaciones $y = x^2 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Ya vimos que si $c = 0$ los puntos de la parábola correspondiente son de equilibrio.

Por otro lado, las curvas de nivel correspondientes a $c \neq 0$ no contienen puntos de equilibrio y por lo tanto cada una contiene una sola órbita.

Por último, observamos que si $c > 0$, entonces el campo sobre la correspondiente curva de nivel tiene la primer componente negativa, mientras que si $c < 0$ la primera componente del campo es positiva.

Esto nos permite hacer el siguiente bosquejo del diagrama de fase:



d) Sea (x_0, y_0) es un punto de equilibrio (se cumple $y_0 = x_0^2$) y $\epsilon > 0$. Para todo $\delta > 0$ existe un parábola de la forma $y = x^2 + c$ que corta la bola de centro (x_0, y_0) y radio δ . Dicha parábola es una órbita, por lo tanto una solución de la ecuación que en cero pasa por un punto de esta intersección necesariamente debe escaparse a futuro de la bola de centro (x_0, y_0) y radio ϵ . Concluimos entonces que todos los puntos de equilibrio son inestables.